REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

El aura de los números

Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari electe

Excm. Sr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra

Doctor Enginyer de Camins, Canals i Ports

A l'acte de la seva recepció, 11 de juny de 1998, i

discurs de contestació de l'acadèmic de número

Excm. Sr. David Jou i Mirabent

Doctor en Ciències Físiques

Barcelona

Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra

El aura de los números

REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

-Publicacions-

Honorable Conseller,
Excm. Sr. President,
Srs. Acadèmics,
Excmes. Autoritats,
Senyores i Senyors,

Les meves primeres paraules seràn d'agraiment a aquesta Il.lustre Corporació que tant dignament presideix l'Excm. Sr. Doctor Josep Casajuana, per acollir-me en el seu sí com a membre numerari. El prestigi que amb tant de mereixement l'envolta, fa que em senti altament gratificat amb aquest honor, que molt aprecio.

I una particular referència, amb el profund reconeixement de la Reial Acadèmia i el meu propi, a l'Honorable Sr. Antoni Subirà, Conseller d'Indústria, Comerç i Turisme de la Generalitat de Catalunya, que fent un incís en la realització de les importants tasques de la seva Conselleria, s'ha dignat realçar amb la seva presència la solemnitat d'aquest acte.

A l'hora d'escollir un tema pel discurs protocolari m'he decidit per realitzar una reflexió sobre l'home i els nombres. Sobre com la humanitat ha evolucionat en paral.lel amb la seva aspiració per quantificar els fenòmens de la natura i sobre com el progrés dels pobles ha anat de la mà dels avenços en expressar de forma numèrica la solució als seus problemes més quotidians.

Les relacions de l'home i els nombres es barregen amb el desenvolupament de pràcticament totes les ciències en general, i amb les matemàtiques i la filosofía en particular. Com enginyer que viu de proporcionar respostes tals com quines dimensions ha de tenir una peça o una estructura, quan es trencarà un material determinat i quin serà el cost de fabricació d'un nou producte, constato a diari que els nombres formen una part substancial de la meva activitat professional. Quasi sense adonar-me'n, amb el pas dels anys he anat reconeixent paulatinament que, sense arribar a la màxima pitagòrica de que «els nombres ho són tot», sí que percebo de forma cada vegada més nítida que els nombres irradien una llum pròpia que ilumina les nostres vides, i que la lluita de l'home per millorar la seva existència passa per conéixer, primer, i influir, després, en tota una sèrie de circumstàncies que l'envolten que, además dels seus aspectes subjectius, ténen un valor numèric concret.

I

EL BUCLE DE LOS NÚMEROS

Mi visión particular de la relación entre el hombre y los números se resume en la tesis que conforma el argumento de este discurso y que creo oportuno desvelar desde el principio. Sólo así puede quizás tener sentido un estudio realizado sin pretensiones enciclopédicas. Dicha tesis es la siguiente: la concepción numerológica del universo iniciada por la escuela de Pitágoras quinientos años antes del nacimiento de Cristo, evolucionó a través de los siglos durante dos mil trescientos años hasta el descubrimiento del cálculo infinitesimal por Newton y Leibnitz, que permitió expresar las leyes de la naturaleza en forma de ecuaciones diferenciales. Hoy en día, casi trescientos años después, ante la imposibilidad de encontrar soluciones «analíticas» a dichas ecuaciones, se ha producido el retorno de los números, que pasan a ser otra vez los protagonistas de la historia. Este regreso se plasma a través de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales. Es decir, mediante la búsqueda de los valores concretos de los parámetros que gobiernan las ecuaciones matemáticas de un problema de física o ingeniería.

Estas ideas no son en absoluto novedosas. La toma de conciencia del papel fundamental de los números en la evolución de las ciencias en este siglo llevó al gran Bertrand Russell (1872-1970) a exclamar que «lo que hay de más asombroso en la ciencia moderna es su retorno al pitagorismo». Estas palabras pronunciadas hace casi cincuenta años tienen todavía más vigencia en nuestros días. Los progresos espectaculares de los últimos cuarenta años en todos los campos de la ciencia y la tecnología han ido de la mano de los avances de los denominados métodos de cálculo o métodos numéricos, destinados a extraer respuestas en forma de números de las ecuaciones diferenciales deducidas por los matemáticos a lo largo de los dos siglos anteriores.

La terna número-ecuaciones (diferenciales)-número contiene numerosos ejemplos de su admirable simetría. La concepción inicial de los números desde varios milenios antes de Cristo, alcanza con Pitágoras el punto más alto en el que los números ocupan el centro del universo. A través de la numerización de las ciencias se desarrollan los principios de la lógica de Platón y Aristóteles, la geometría y el álgebra de Euclides, y los métodos de cálculo de Arquímedes que influyen durante siglos (incluso hoy en día) en el desarrollo de las matemáticas, la ciencia y la técnica en general. De ahí hasta la formulación de todo lo que ocurre en la naturaleza en forma de ecuaciones diferenciales, pasan casi veinte siglos.

Tras el descubrimiento del cálculo infinitesimal, los discípulos más incondicionales de Newton y Leibnitz podrían quizás afirmar que «las ecuaciones diferenciales lo son todo». En nuestros días el bucle se ha cerrado, de manera que cualquier ecuación y cualquier método de cálculo solo es bueno en función de su capacidad de proporcionar resultados numéricos aceptables. Han regresado los números, dos mil quinientos años después de que fueran encumbrados al zenit por la escuela pitagórica.

«Si no posees la capacidad de cálculo, entonces serás incapaz de especular sobre los placeres del futuro y tu vida no será la de un ser humano, sino la de una ostra o la de un pulmón marino». Esta frase, con otras palabras, y quizás con menos retórica, la repetimos frecuentemente en nuestras escuelas de ingeniería para animar a los alumnos a profundizar en las técnicas de cálculo sobre las que se basarán la mayor parte (sino todas) de sus actividades profesionales. Retrocediendo veinticinco siglos encontramos la frase original anterior en boca de Platón, aconsejando a Sócrates en los diálogos del Fileto (o Del Placer). Otro salto, esta vez de veinticuatro siglos hacia adelante, nos permite reencontrar la frase en boca de Maurice d´Ocagne (1862-1938), quien con muchas más palabras expresó, en 1893, que «la importancia del cálculo se afirma tanto en el ámbito de la teoría como en el de la práctica. Los progresos materiales realizados por nuestra civilización derivan todos, más o menos directamente de la ciencia. Ahora bien, la ciencia no podría progresar por sí misma sin la ayuda permanente del cálculo, y no se trata aquí sólo de las ciencias antiguamente denominadas exactas, como la mecánica o la astronomía, en las que el cálculo desempeña un papel esencial, sino también de las que hasta hace poco eran consideradas sólo como ciencias experimentales o de observación, debido a la precisión que se ha introducido en sus métodos. En todas las ramas de la física, e incluso en la química, la fórmula matemática ha cobrado una importancia capital.

No hay nada, incluso la filosofía, que no recurra a ella, después de haberse reconocido la necesidad de hacer intervenir la noción de medida en el estudio de los hechos de su campo».

Esta realidad no excluye el hecho de que el proceso de cálculo, realizado con medios únicamente manuales, además de limitado, puede ser fastidioso, y por ello pesado e impopular. El fastidio proviene de su carácter frecuentemente repetitivo, lo que consume cantidad de tiempo y energía, y lo que es peor, suele ser una fuente de errores. El desánimo de los primeros grandes calculistas del siglo pasado se resume en las palabras pronunciadas en 1884 por el ingeniero de estructuras y militar Luigi F. Menabrea (1809-1896): «¡Cuántas observaciones preciosas son inútiles para los progresos de las ciencias y las técnicas, porque no hay fuerzas suficientes para calcular los resultados de las mismas! ¡Cuántos desánimos no infunde la perspectiva de un largo y árido cálculo en el hombre de genio, que sólo pide tiempo para meditar y se ve privado de él por el volumen de las operaciones de un sistema inadaptado! Y, sin embargo, debe llegar a la verdad por la vía laboriosa del análisis, pero él no puede seguirla sin guiarse por los números, ya que, sin los números, no existe la posibilidad de levantar el velo que oculta los misterios de la naturaleza».

El debate está abierto: la búsqueda de los números es una prioridad para el conocimiento de la naturaleza y para definir líneas de progreso científico y tecnológico. Esta búsqueda es laboriosa y debe simplificarse. ¡Vayamos pues en la búsqueda de ayuda!

«Si el cálculo es el auxiliar indispensable de la investigación científica, también constituye el instrumento mismo con el cual los principios descubiertos gracias a la investigación son empleados con vistas a las aplicaciones prácticas. Así es como el navegante, el geodeta, el artillero, el mecánico, el electricista, el financiero, etc., están obligados a recurrir a él sin cesar; para cada uno de ellos el cálculo constituye una pauta importante, seguramente no la menos pesada de su vida cotidiana. Por consiguiente, la simplificación del cálculo proporciona al investigador un alivio considerable; pero a veces tiene aún otra ventaja, pues hace posibles, incluso fáciles, operaciones que exigirían un esfuerzo desproporcionado con el resultado que va a obtenerse y que nadie, quizá, se tomaría la molestia de emprender» (M. d´Ocagne).

De estas inquietudes generalizadas surgen las primeras calculadoras mecánicas a finales del siglo pasado, aunque algunas de ellas fueron concebidas a lo largo de los dos siglos anteriores por Neper (1550-1617), Pascal (1623-1662) y Leibnitz (1646-1716), hasta desembocar en los modernos ordenadores electrónicos utilizados en nuestros días.

Número-ecuaciones-número; un bucle mágico que ha influido y sigue influyendo decisivamente en la evolución de la vida del hombre. El control de los números, es decir, la obtención de respuestas numéricas concretas a problemas relacionados con la naturaleza y las formas de modificarla para beneficio de la humanidad, es la tarea que ocupa cotidianamente a ingenieros y científicos de todo el mundo.

Las páginas que siguen pretenden repasar algunos de los hechos y conceptos, a mi entender, fundamentales en el bucle de los números. Hablaré de las tres etapas esenciales en la evolución de la terna número-ecuaciones-número: la concepción inicial del valor de los números, centrada en la época dorada de la antigua Grecia; la evolución de las matemáticas a través de la Edad Media y el Renacimiento hasta la fomalización del cálculo infinitesimal en el siglo XVII; y, finalmente, la resurrección de los números, a través de los denominados métodos numéricos y la ayuda de los ordenadores.

Obviamente, el recorrido anterior, que equivale a presentar gran parte de la historia de la ciencia y la técnica, es inabordable en tan pocas páginas. Sacrificaré, por tanto, infinidad de datos y hechos, muchos de ellos por otra parte bien conocidos, en aras de mantener el argumento de esta historia que se centra en resaltar el hilo invisible que une las primeras percepciones de los números hace miles de años, con las aplicaciones generalizadas de los métodos numéricos en nuestros días, que incluso permiten traducir en sensaciones físicas, a través de las máquinas de realidad virtual, el resultado de complicados cálculos de ordenador.

II

LA PERCEPCIÓN DE LOS NÚMEROS

Hasta que el hombre no se asegura un mínimo de alimentos, vestido y morada, es mucho pedirle que emplee su tiempo libre elucubrando sobre el papel que juega en el universo. Es por tanto comprensible que los primeros pasos en el desarrollo del concepto de número tuvieran un claro motivo utilitarista.

El granjero egipcio de hace cinco o seis mil años, por ejemplo, necesitaba conocer cuando se produciría la inundación anual del valle del Nilo y para ello necesitaba un calendario fiable.

Incluso el calendario más sencillo presupone una familiaridad con los números muy superior a la adquirida por los pueblos primitivos más avanzados. El acto de contar no se perfeccionó en unos pocos días, y muchas tribus semi-civilizadas tuvieron grandes dificultades en enumerar sus posesiones. Para ellas, los números superiores a media docena eran indistinguibles entre sí.

La idea de que el concepto del número es innato en el hombre tiene muchos adeptos. El sentido «natural» del número se manifiesta en los seres humanos, e incluso en algunos animales, por el hecho de que pueden detectar la presencia de cantidades pequeñas. En nuestro caso, si echamos una ojeada a un conjunto de menos de diez objetos podemos percibir de forma inmediata la cantidad de objetos presentes. Sobre los animales existen diferentes anécdotas de su «sensibilidad numérica». Así, una avispa deposita exactamente diez orugas en las celdillas del panal donde hay un huevo hembra, y en las que contienen un huevo macho deposita sólo cinco. Algunos chimpancés son capaces de designar el elemento central colocado en mitad de una sucesión impar de objetos presentados en línea, y se ha conseguido enseñar a pájaros carpinteros un código numérico de solicitud de orden: 1 golpe para un pistacho, 2 para un grillo, 3 para un gusano, 2+2 para un abejorro y 2+2+3 para un saltamontes. La anécdota más conocida, no obstante, es quizás la del cuervo que llegaba a un huerto y emprendía el vuelo cada vez que el granjero acudía. Furioso el granjero, ideó un método para engañar al cuervo. Construyó una cabaña en el huerto y se introdujo en ella con un amigo; el amigo salió y el granjero se quedó dentro. El cuervo, advirtiendo que todavía quedaba una persona dentro de la cabaña, no volvió. El granjero repitió el experimento con dos y tres amigos, con idéntico resultado. Finalmente, probó a llevar a la cabaña a cuatro amigos que, una vez más, salieron de uno en uno. Esta vez el cuervo si que regresó, lo que le permitió cazarlo. El sentido del número del cuervo le permitía llevar la cuenta de una cantidad sólo hasta cuatro números, a partir de ésta, el sentido del número del cuervo se difundía en una nebulosa de muchos.

¿Significa lo anterior que los animales saben contar? No, para ello sería necesario que pudieran enumerar una serie cualquiera. Por el momento no se ha exhibido espécimen alguno capaz de semejante hazaña, y, por tanto, el hombre sigue siendo la única especie que puede afirmar, «cuento, luego existo».

Buscando en las sociedades humanas primitivas se encuentran diversos ejemplos de una idea de número muy simplicista, donde sólo tienen cabida los conceptos «uno», «dos», «pocos» y «muchos». El concepto de la matemática moderna de «infinito», para el sabio de la tribu se correspondía con el del igualmente nebuloso «muchos». El margen entre morir de hambre y la saciedad está más adecuadamente cubierto por la diferencia entre seis y diez, que por el espacio desconocido entre diez y quince. A ojo, el jefe decidirá cuando la tribu ha comido bastante, siendo irrelevante si es demasiado.

Las referencias de 120.000 prisioneros, 400.000 bueyes y 1.422.000 cabras reflejadas en las crónicas del contable real egipcio hacia el año 3500 a.C., indican que los egipcios estaban instruidos en el uso de grandes números. Pese a esta evidencia y otras similares, está aceptado que los egipcios de esa época no eran conscientes de que la secuencia de números 1,2,3,4,5,... no tiene fin.

La cifra de prisioneros, bueyes y cabras anteriores reflejan no obstante algo de gran importancia; un hecho que quizás puede pasar desapercibido para nosotros, que aprendemos a contar antes que a leer, pero que es de una profunda relevancia en la evolución de los números.

Mirando a sus cautivos humanos y al resto, ¿qué podría decir el vencedor sobre cada uno de los tres grupos que fuera cierto para todos? Además de que todos eran seres vivientes, a lo cual probablemente no le otorgó importancia a la hora de evaluar el botín, lo que realmente advirtió y recogió fue que los tres grupos podrían compararse con respecto a la unidad de la misma manera. Podían contarse.

Si esto parece demasiado trivial, ¿podemos imaginar alguna otra característica diferente del número asignado a cada grupo que sea igualmente significativa y tan útil? Como el cazador bien sabe, no hay diferencia en que orden se cuentan las capturas, o si el resultado se hace de uno en uno o de siete en siete: el resultado será siempre el mismo. El mago de la corte podía convencer al emperador que la victoria era fruto de la bondad de uno u otro dios, pero no podía mostrarle 400.001 bueyes contando sólo 400.000.

La engañosa simplicidad de la operación de contar encierra los secretos que la han hecho útil y filosóficamente sugerente. Como ejemplos, E.T. Bell (1833-1960) menciona la universalidad y la invarianza de los números generados al contar. Universalidad -la verdad eterna, lo siempre relevante- ha sido el objetivo de muchas filosofías. Invarianza -libre de cambios en un entorno mutante- ha sido la obsesión de todas las religiones, y en este siglo ha ayudado a codificar las leyes de la física. Pongamos un ejemplo de la vida cotidiana: cinco personas se encuentran y se separan. Cualesquiera que sean sus destinos y sus fortunas posteriores, el «cinco» que los numeró permanecerá inalterado y es independiente, como ningún otro factor en sus vidas, de los accidentes de espacio y tiempo. Más aún, el mismo «cinco» enumerará los individuos de un grupo de cinco cosas cualesquiera.

Pese a la evidencia de todo lo anterior para nosotros, la universalidad e invarianza de los números antecedió en muchos miles de años a los guerreros que contaban sus presas. Ellos se servían de los números para sobrevivir y prosperar. Los orígenes de la operación de contar eran no obstante más remotos, y a la civilización egipcia, tan avanzada para la época, probablemente nunca se le ocurrió pensar qué eran los números, o especular cómo los humanos los inventaron. Estas preocupaciones han ocupado al hombre desde los tiempos más lejanos de los que tenemos constancia. Ni siquiera los inquisitivos griegos se preguntaron explícitamente qué eran los números, aunque Pitágoras y sus seguidores hablaron de ellos constantemente como si tuvieran vida.

La pregunta de quién inventó los números puede estar mal planteada. Es posible que los números nunca se inventaron deliberadamente por un hombre o grupo de hombres, sino que evolucionaron casi imperceptiblemente, tal y como se cree por algunos que el lenguaje se desarrolló de gritos sin sentido. En algún momento, en algún lugar, los humanos empezaron a habituarse a utilizar los números sin saber exactamente lo que hacían. No obstante, los números 1,2,3,.. exhiben la marca de la inspiración y de la invención consciente. Aunque sea mera especulación, podemos imaginar a un genio desconocido percibiendo de repente que un hombre y una mujer, un perro y un gato, un amanecer y un anochecer, y, de hecho, cualquier pareja de cosas tienen todas algo en común: son «dos». De ahí a la concepción del número dos pudo haber un gran paso, pero seguramente alguien lo dio antes de que el rey contara sus cautivos.

Al admitir que los números fueron inventados, hemos tomado partido frente a muchos eminentes filósofos, Platón entre ellos, e insignes matemáticos de los siglos XIX y XX que defienden otra alternativa. Si los números no fueron inventados por los humanos, pueden -no necesariamente deben- haber sido «descubiertos». Esta es la encrucijada donde acaba el conocimiento y comienzan las opiniones. Se trata de la división entre los que creen que las matemáticas proceden del interior de la mente y quienes creen que proceden del exterior. Los primeros, creen que inventamos las matemáticas como un instrumento útil para describir los procesos que vemos a nuestro alrededor, y que esto es lo que hacen las matemáticas. Los segundos, creen que descubrimos las matemáticas, que están «ahí fuera» de algún modo y estarían allí, incluso si no hubiera matemáticos.

Los defensores de la segunda opción tienen argumentos convincentes. En matemáticas se encuentran con frecuencia ejemplos de descubrimiento múltiple. Es decir, encontramos matemáticos separados en el espacio y en el tiempo que llegan a idénticos descubrimientos. Semejante coincidencia sería inconcebible en las artes. ¿Cómo podrían dos escritores diferentes producir idénticos El Quijote o idénticas óperas de Wagner? Además, encontramos con frecuencia ejemplos de colaboración en campos de investigación matemáticos o científicos. Por el contrario, la colaboración es más bien rara en las artes y cuando ocurre hay una demarcación de actividades muy estricta, tal como escribir la letra y la música de una canción. Todo esto refuerza la impresión de que las matemáticas tienen alguna base objetiva, que es total o parcialmente independiente de la mente humana. Las artes, por el contrario, se valen de la esencial unicidad que brota de su subjetividad.

La diferencia entre los dos credos es todo menos trivial, aunque es obvio que los dos no pueden ser ciertos. Quizás lo que ocurre es que la pregunta: ¿fueron los números inventados o descubiertos? no está bien planteada. Puede parecer tan sin sentido a nuestros sucesores como la pregunta: ¿la bondad es azul o triangular? Por el momento, hasta que intervengan los psicólogos, la pregunta sobre los números parece tener para nosotros el mismo sentido que otras cuya respuesta puede ser objeto de debate, tales como ¿se descubrió América en 1492 o se inventó entonces? o ¿descubrió Flemming la penicilina o la inventó?

La pregunta sobre si los números fueron descubiertos o inventados, no es, sin embargo, tan sencilla como las dos anteriores. Cualquier respuesta que demos estará influenciada por nuestras emociones ya que, de hecho, no puede responderse tomando como base ninguna prueba o experimento objetivo. La pregunta es del calibre de las que conciernen a la relación del hombre con el universo y que han preocupado a filósofos, teólogos y científicos durante siglos. Parafraseando a E.T. Bell podemos decir que «los que opinan que los números fueron descubiertos estarán de acuerdo que el hombre es el producto más noble de Dios. Por el contrario, los que apoyan un origen humano de los números, estarán inclinados a admitir que el hombre ha construido casi siempre sus dioses a su propia imagen».

No es objeto de esta reflexión tomar partido en esta vieja controversia. Mi única preocupación es mostrar la analogía entre el impacto que la primera percepción de los números tuvo en los orígenes de la civilización del hombre, y la que tiene en el momento actual. Si la pregunta sobre el origen de los números entra en la categoría de las «indecidibles», tiene muy poca importancia frente a la cuestión inapelable de que los números han influenciado como ningún otro concepto el desarrollo de las formas de vida del hombre, y todo parece indicar que estarán cada vez más presentes para ayudarnos a diseñar nuestro futuro.

III

LOS PRIMEROS ALBORES

Existen numerosas evidencias de que los sabios de Grecia tuvieron insignes predecesores interesados en la aritmética y el álgebra. Las referencias arqueológicas más antiguas muestran que hacia finales de la época neolítica (3300 - 3100 a.C.), cuando los griegos no eran más que un conjunto de tribus nómadas desplazándose sobre Asia Menor, tanto en Mesopotamia como en Egipto se disponía de un sistema de numeración elaborado de forma independiente. No obstante, si bien ambos pueblos aprendieron desde antiguo a hacer operaciones aritméticas, los métodos de cálculo de los egipcios, basados en saber sumar y multiplicar por 2, carecieron de flexibilidad, sencillez y unidad, y, si bien bastaron para resolver los problemas inmediatos derivados del comercio, la guerra y la construcción de pirámides, no llegaron a constituir la base de desarrollos conceptuales posteriores.

El caso de los pueblos mesopotámicos fue bien diferente. Los antiguos habitantes del país de Sumer en el sur de Mesopotamia eran maestros en el uso de la aritmética desde tiempos ancestrales. De esta parte del mundo se ha encontrado en la denominada Tablilla de Suruppak (2650 a.C.), la referencia más antigua de una división, relativa a la distribución de una cantidad de cebada entre unos hombres. Sobre el año 2350 a.C., los sumerios fueron absorbidos por los pueblos vecinos del norte (los acadios). Tras una breve recuperación de su territorio durante las dinastías de Lagash y Ur, hacia el 2000 a.C., la presión de los elamitas (al este) y los amoritas (al oeste) barrió la civilización sumeria dando paso a la cultura asirio-babilónica. Los amoritas crearon la ciudad de Babilonia, cuyo territorio se extendió a toda Mesopotamia hasta el este de Siria. Las aportaciones de este inmenso y potente reino hasta su conquista en el año 539 a.C. por Ciro, rey de Persia, y después por Alejandro Magno, en el año 311 a.C., fueron de suma importancia.

Desde los inicios de la primera dinastía bajo el famoso Hamurabi (1792-1750 a.C.), hasta el glorioso reinado de Nabucodonosor (604-562 a.C.), florecen en Babilonia el arte, la aritmética y el álgebra. En el contexto que nos ocupa, el aspecto quizás más relevante es la aportación de los babilonios del sistema de numeración de base 60 o sexagesimal. Todavía hoy encontramos muchas reliquias heredadas de este sistema: en la medición del tiempo y el cálculo de coordenadas náuticas, entre otras. Las razones de por qué los babilonios escogieron este sistema, es que el número 60 tiene muchos divisores (1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30 y 60) y por ello es útil para propósitos comerciales, al poder utilizarse para dividir las medidas en partes, sin necesidad de números fraccionarios como un medio o tres quintos.

A diferencia de los egipcios, los babilonios no fueron sólo buenos aritméticos. A los eruditos de Babilonia se les atribuye el descubrimiento del principio de posición, base del sistema actual de representación de un número. Así, según el sistema sexagesimal babilónico, el número 372 se representaba por la escritura del número 6, colocado en la segunda posición (rango de las centenas), y la del número 12, colocado en primera posición (rango de las unidades del primer orden sexagesimal). Dicha anotación se podría transcribir como [6;12] =6 x 60 + 12. Esto equivale a la expresión actual de 372 minutos en la forma 6 h 12 m.

Este hecho, junto con los avances de los babilonios en la solución de ecuaciones de segundo y tercer grado con ayudas de tablas de cuadrados y cubos, y fundamentalmente por sus contribuciones en geometría, catalogan el álgebra de los tiempos de Babilonia, en opinión de muchos investigadores, como comparable a la mejor álgebra producida hasta el siglo XVI de nuestra era.

Es muy interesante reflexionar por qué los babilonios no tuvieron una influencia más decisiva sobre el desarrollo de las matemáticas. Está, de hecho, aceptado que, pese al nivel de sofisticación alcanzado en las parcelas arriba mencionadas, su influencia en los trabajos de los matemáticos y filósofos posteriores, incluidos los griegos, no fue lo relevante que pudiera esperarse. En realidad, sólo hasta los descubrimientos arqueológicos de este siglo se ha podido constatar el nivel de excelencia de la cultura matemática babilónica. Si en algo fallaron por tanto los sabios de Babilonia, fue en transmitir de forma efectiva sus logros, mediante la creación de escuelas de pensamiento que aseguraran la supervivencia de sus ideas. La superación de esta carencia, sin duda, fue el mérito de la civilización griega, cuyos frutos se han recogido a lo largo de los siglos posteriores hasta nuestros días.

Algunos historiadores atribuyen la causa de la no supervivencia de la cultura babilónica a su carácter de inmediatez. La necesidad de resultados a corto plazo, que también caracterizó la aritmética de los egipcios, debida en muchos casos a la necesidad de primar las razones de supervivencia por encima de las más elevadas del intelecto, fue un freno para que se produjesen avances decisivos en el terreno de las matemáticas y la filosofía. Un claro ejemplo de esto se encuentra en una tablilla sumeria de aproximadamente el año 2000 a.C. En dicha tablilla se plantea el problema siguiente: «Una parcela de tierra de 1000 m2 está formada por dos cuadrados. Dos tercios del lado de un cuadrado excede en 10 metros el lado del otro. Calcular los lados de los dos cuadrados». Una simple operación de álgebra da dos soluciones. Los lados de los cuadrados son 10 y 30 metros, o -270/13 y -310/13 metros. La aritmética de los sabios babilónicos, siempre juiciosa, proporcionó el primer resultado. Obviamente, al no conocer los números negativos, la segunda respuesta era impensable para ellos. Incluso, si se encontraron con ella, su sentido práctico les hizo desecharla al instante. ¿Qué forma tendría una longitud negativa? Sólo las figuras que pueden interpretarse eran de utilidad; por consiguiente, para el práctico babilonio las longitudes negativas no entraban en su esquema.

Sólo cuando un conjunto de individuos tuvieron el valor, o el candor, de no desechar nada de antemano, e hicieron el esfuerzo honesto de entender qué estaban haciendo con los números (o qué hacían los números con ellos) se inició el desarrollo libre y completo de la aritmética. Desgraciadamente, esto no ocurrió hasta mucho tiempo después de que el esplendor de Babilonia se hubiera extinguido, y cuando las matemáticas de Grecia comenzaron a tomar un cuerpo sólido, que iba a configurar una etapa gloriosa destinada a influenciar los desarrollos del hombre más que ninguna otra época pasada. Pese a ello, tendrían que pasar muchos siglos hasta que el hombre descubrió la existencia del cero y aprendió a manejar los números negativos con seguridad. Incluso entonces, en el siglo XIX, la pregunta esencial de si los números negativos fueron inventados o descubiertos, siguió sin respuesta.

La experiencia de los algebristas babilonios, se ha repetido una y otra vez en la historia del desarrollo de la ciencia. Generaciones de estudiosos han contribuido a perfeccionar teorías y métodos, avanzando a veces en círculos casi concéntricos. Sin embargo, los avances más significativos se producen sólo en el momento en que a la inteligencia del científico se le añaden las gotas necesarias de curiosidad. Esta es la lección de los sabios de Grecia, cuyo crédito en esta historia debe ser, no obstante, compartido con los babilonios.

IV

EL SIGLO DECISIVO

El siglo XVII de la era cristiana ha sido catalogado por muchos como el «siglo de oro» de la ciencia y la matemática moderna. Fue el siglo en el que Galileo (1564-1642) y Newton (1642-1717) ejercitaron por vez primera el gran poder del método científico de nuestros días, que combina las matemáticas con la observación y el experimento. En dicho siglo, además, Newton y Leibnitz (1646-1716) formalizaron el denominado «cálculo infinitesimal» que iba a permitir caracterizar, por vez primera, prácticamente todos los fenómenos de la naturaleza en forma de ecuaciones matemáticas. Dichos descubrimientos abrieron las puertas a la ciencia moderna, y muchos coinciden que sin ellos no hubiera tenido lugar la gran revolución industrial de los siglos XVIII y XIX, cuyos efectos han llegado hasta nuestros días. Esta historia, por ser más próxima, es quizás más conocida. El interés en mencionarla aquí es para introducir una comparación con el revolucionario progreso de la civilización en otro gran siglo, el siglo VI a.C.

En ese siglo, dos griegos, Tales y Pitágoras, posiblemente los primeros inmortales de las ciencias exactas, realizaron avances tan decisivos en matemáticas, y en la ciencia en general, que hicieron posible el trabajo posterior de Galileo y Newton. Si creemos en puntos de inflexión en la historia, el siglo VI a.C. fue uno de ellos. En todos los aspectos, ya sean científicos, matemáticos o religiosos, fue un siglo memorable para el futuro de la civilización occidental. En él se produce el despegue del hombre, como ser dueño de sus actos y libre para emitir sus decisiones basadas en juicios razonados. Codo a codo con el mundo de las supersticiones más groseras, floreció la especulación de la razón sobre todos los aspectos del universo y de la relación del hombre con él.

Es muy interesante observar el entorno en el que tanto Pitágoras (569?-500?) como su predecesor Tales (624?-546) prosperaron. Tales de Mileto creció y desarrolló su geometría en plena guerra entre las concepciones politeístas, inspiradas por los dioses humanizados por Homero trescientos años antes, y las monoteístas defendidas por discípulos de profetas hebreos, como Amós, Oseas, Miqueas e Isaías. Esta disputa religiosa influenció el pensamiento de Tales, tanto quizás como sus numerosos viajes por Egipto y Babilonia, en los que tuvo ocasión de debatir sus ideas con otros profetas. Las semillas esparcidas en este periodo florecieron doscientos cincuenta años después en los pensamientos de Platón sobre aritmética transcendental y números ideales. Asimismo, contribuyeron significativamente a configurar la religión que los europeos iban a aceptar años después. Por tanto, las ideas sobre la ciencia, la filosofía, la matemática y la religión que han guiado la civilización occidental, estaban ya en estado embrionario en el siglo VI antes de nuestra era.

Es curioso que la cultura asiática dio también un giro importante en ese tiempo. Confucio invitó a los chinos a practicar una cierta filosofía de la vida, y los hindúes, por su parte, aceptaron el budismo.

A la muerte de Tales, Gautama, el Buda, tal vez, tenía sólo quince años. Aunque Tales y el Buda nunca se encontraron, la tradición, sin mucho fundamento, acepta que Pitágoras, en uno de sus legendarios viajes, conoció al Buda. Si este hecho se produjo o no, es imposible de probar. Sí parece más cierto que el eventual encuentro entre las matemáticas de Pitágoras y la mística del Buda no llegó a producir los frutos deseados. De otra manera, quizás, la combinación de las ideas de los probablemente dos más grandes pensadores de la época, se hubiera traducido en mayores avances, tanto en oriente como en occidente, que hubieran evitado cantidad de errores y desgracias posteriores; muchas de ellas, tales como la existencia de millones de intocables en la India, perduran hasta nuestros días.

En ese sentido, coincido con E.T. Bell en que todo parece indicar que nuestra civilización escapó de girar hacia oriente en vez de hacia occidente en dicho crítico sigloVI a.C. En qué estado se encontraría el mundo ahora si ese giro hubiera sido otro, no lo puede imaginar ni el numerólogo más experto.

De Tales existen tantas anécdotas, como evidencias de su profunda afición y conocimiento de la geometría y el cálculo. Para muchos, fue el primer geómetra universal y un claro antecesor de Euclides. Ciertamente, Tales introdujo un nuevo estilo en casi todas sus relaciones con la ciencia, la religión, la filosofía y las matemáticas. Aunque coetáneo de Creso, el rey famoso por su afán al oro y las riquezas, Tales solía responder a sus agradecidos ciudadanos cuando le preguntaban qué quería por sus servicios, que sólo deseaba «reconocimiento por sus descubrimientos». De esta forma se convirtió posiblemente en el primer hombre que percibió que lo intangible de la fama es superior a las riquezas materiales.

Los conocimientos de geometría de Tales le permitieron hacer descubrimientos notables. Los más famosos son, quizás, la predicción del eclipse de sol durante una de las guerras púnicas entre Medeos y Lidios (aparentemente el 28 de mayo del año 585 a.C.), o el cálculo de la altura de la gran pirámide en Egipto. No obstante, a efectos de esta historia, la principal aportación de Tales es que introdujo por vez primera el concepto de abstracción y demostración en el estudio de líneas geométricas curvas y rectas. Dicho estudio le llevó a formular el famoso teorema de equivalencia entre los lados de dos triángulos de ángulos iguales. Seguramente, Tales tuvo ocasión de comprobar su teorema con triángulos cuyos lados eran medibles. No pudo, sin embargo, hacer lo mismo con otros en los que la medición era imposible, ya que los «números» necesarios para hacer esta medición sólo se imaginaron años después de su muerte. La validez universal del teorema de Tales, independientemente de que su comprobación fuese posible, fue el rayo de luz que anunció el fin de miles de años de tinieblas, y, ciertamente, provocó un cambio de rumbo en las formas del pensamiento del hombre antiguo hacia el mundo que hoy conocemos.

Entre los discípulos aventajados de Tales destacó Anaximandro (610-547 a.C.), quien fue asimismo un geómetra memorable que realizó importantes contribuciones en astronomía y cartografía. Enseñó la redondez de la Tierra, que la Luna recibía la luz del Sol y que éste tiene unas 28 veces mayor circunferencia que la Tierra. No obstante, Anaximandro tiene un especial interés en el contexto de este relato por ser la primera referencia de la percepción del infinito. Así, Anaximandro defendió el origen del mundo a través de un principio infinito indeterminado del que por desdoblamiento procedían los pares de opuestos, tales como el calor y el frío, la sequedad y la humedad, la vida y la muerte, en perpetua renovación de movimiento. Estas ideas influyeron profundamente en las de matemáticos y filósofos a lo largo de muchos siglos posteriores.

La revelación de Pitágoras

El viaje definitivo hacia la civilización lo dio Pitágoras pocos años después.

Dos consecuencias de gran relevancia posterior en ciencia y filosofía emergieron de las fascinantes aportaciones de Pitágoras en aritmética y geometría elemental. La primera fue la creencia de que el universo físico puede describirse de manera consistente en función de números. La segunda, su convicción de que las conclusiones alcanzadas mediante razonamientos matemáticos son de mayor certeza que las obtenidas de cualquier otra forma. Ambas opiniones han sido cuestionadas, especialmente en el periodo desde la última década del siglo diecinueve hasta los inicios de la segunda guerra mundial. Las dos se han modificado muchas veces para acomodarse a conocimientos más avanzados. Pese a ello, la esencia de ambas aseveraciones permanece substancialmente inalterada. Hoy en día pueden considerarse postulados complementarios de una única hipótesis, todavía no verificada: la comprensión racional de (al menos) el universo físico es posible, y, cuando se produzca, coincidirá con las experiencias de los sentidos y permitirá al hombre predecir el curso de la naturaleza.

Este sueño ambicioso no implica necesariamente aceptar que toda la naturaleza se reduzca a una única fórmula, como los numerólogos de la escuela pitagórica admitían. No obstante, la visión de síntesis progresivamente más perfectas, permitiendo aproximaciones sucesivamente más cercanas de la «realidad», no se considera una ilusión por la mayoría del mundo científico, a pesar todavía del escepticismo de algunos.

Ciertamente, ningún hombre como Pitágoras puede tener mayor crédito por haber iniciado las matemáticas y las ciencias físicas en su andadura desde la antigüedad hacia nuestros días. Su presencia en el siglo VI a.C. marca la ruptura decisiva entre las mitologías orientales y el racionalismo occidental. Antes de su tiempo las mentes racionales pugnaban por emerger desde un pasado repleto de supersticiones, magia y misticismo en torno al papel de los números. Después de Pitágoras, surge un futuro luminoso para las matemáticas, las ciencias experimentales y la razón. La aplicación de las dos primeras al mundo físico han tenido efectos evidentes en sucesivas revoluciones industriales que han configurado la civilización occidental que hoy conocemos. Por otro lado, desde la perspectiva meramente intelectual, la numerología de Pitágoras y su escuela fueron la fuente de ideas para la metafísica de las ciencias de Platón y la lógica de Aristóteles, de las que se deriva gran parte de la filosofía posterior.

Pitágoras fue una mezcla singular de místico y racionalista. Como experimentalista percibió el poder y utilidad de los números en la descripción de fenómenos naturales. Como filósofo extrapoló sus éxitos científicos a la anonadante generalización de que «todo son números», probablemente uno de los errores más positivos de la historia de los desacuerdos del hombre. La ciencia y la numerología occidentales pueden, por tanto, considerarse como dos hermanas gemelas, muchas veces enfrentadas, nacidas de la mente de Pitágoras.

Antes de seguir es importante recordar que la numerología es la creencia de que el universo puede expresarse por medio de una única gran fórmula. El entendimiento de dicha generalización haría todos los secretos de la naturaleza comprensibles para el hombre, y le permitiría, por tanto, ser dueño indiscutible de su destino.

Este es el sueño que, hoy en día, pese a los avances de cada nuevo descubrimiento, parece cada vez más lejano, aunque todavía posible para muchos. Pitágoras creyó que había encontrado dicha fórmula mágica en su idea de que «todo son números». En su versión más primitiva, el conocimiento último abarcaba literalmente «todo», desde el cielo hasta las emociones más íntimas del hombre. A medida que el conocimiento del universo aumentaba, el «todo» fue sucesivamente recortándose a proporciones más modestas. En la primera mitad del siglo XIX, «todo» se reducía a las ciencias astronómicas y físicas. En el momento actual, los numerólogos tienen razones para recobrar su antiguo optimismo. La evidencia en este siglo de que prácticamente todos los fenómenos de la naturaleza son expresables por ecuaciones matemáticas, y que la solución de éstas es posible en forma de números, vuelve a plantear la posibilidad de que «todo» sea explicable por números. El credo pitagórico permanece por tanto inalterable, apoyando las tesis de los que creen que los números y el hombre forman un binomio indisociable desde el origen de los tiempos.

La herencia más permanente de la antigua numerología de Pitágoras está sólo remotamente conectada con la aritmética. En esencia, el legado pitagórico es el deseo humano de allanar el camino al conocimiento positivo. El descubrimiento de las realidades de la naturaleza a través de experimentos es una tarea extremadamente laboriosa, si no imposible. ¿Es posible reducir y quizás eliminar los costes de la experimentación y encontrar una vía más directa al corazón de la naturaleza? Sí, lo es, declaran los numerólogos contemporáneos, de la misma manera que lo hicieron sus predecesores hace veinticinco siglos.

Tanto la ciencia empírica como la numerología continúan su pugna después de veinticinco siglos de disputa y ninguna de las dos muestra signos claros de poder destruir a su rival. Si los números son importantes, bien puede decirse que hoy en día los partidarios de la numerología, refinada con los años incorporando fragmentos del «todo» pitagórico a las diferentes teorías, son actualmente mucho más numerosos que los defensores del método puramente experimental.

Antes de seguir es preciso detenerse un momento para analizar una duda que seguramente preocupó seriamente a Pitágoras al final de su existencia, y que veinticinco siglos después ha vuelto a perturbar a los modernos pitagóricos.

La hipótesis básica en la que se basan todas las aplicaciones de los números a la ciencia es que las leyes de la naturaleza son racionales. Es decir, dichas leyes se suponen accesibles y comprensibles por una mente sana. Puede, no obstante, que esto no sea así. Conceptos como el infinito o los propios números irracionales, parecen recordarnos que hay una parte del universo fuera de nuestro entendimiento y control.

El problema puede, no obstante, sortearse para garantizar la viabilidad de nuestra existencia. Como bien han dicho muchos, si algunas de las leyes de la naturaleza son inaccesibles para la mente humana, probablemente éstas no pueden ser de gran importancia para los humanos. Lo «eternamente desconocido» puede por tanto ignorarse con tranquilidad. No obstante, esta duda tiene un sentido importante: quizá todas las leyes que hemos imaginado han sido producto de necesidades naturales puestas en la naturaleza por el hombre. Así, nuestra visión e interpretación del mundo no es probablemente más que fruto de la aplicación racional de nuestro legítimo instinto de supervivencia.

La vida de Pitágoras está marcada por numerosos episodios, la mayoría de ellos conocidos a través de sus discípulos, que evidencian su reputación como primer científico y matemático. Uno de los más esenciales, hace referencia al descubrimiento por Pitágoras de la relación entre armonía musical y matemáticas. La historia narra la anécdota de Pitágoras escuchando al pasar el sonido de los golpes del martillo de un herrero sobre varias piezas de metal. Intrigado por el distinto sonido que emitían, llevó las piezas a su casa y estudió la relación entre su longitud y el sonido emitido al golpearlas. Repitiendo después el experimento con cuerdas de distinta longitud en las que colgaba el mismo peso, pudo encontrar definitivamente que las relaciones entre una nota, su quinta y octava estaban en la relación de 6, 4 y 3. Sucesivas pruebas con un simple aparato denominado «monocorde», formado por una cuerda tensada sobre una madera y una pieza o puente movible (como el puente en un violín, pero no fijo) colocado entre la madera y la cuerda, le ayudaron a confirmar su descubrimiento. Al mover el puente, cada una de las partes en que dividía la cuerda podían vibrar independientemente. La tracción sobre la cuerda permanecía (casi) constante al mover el puente a las posiciones 1/2, 2/3, 3/4, etc., de la longitud total de la cuerda. Esto le permitió también medir con precisión las longitudes que correspondían al sonido emitido por cada segmento vibrante. Para su sorpresa, descubrió que los sonidos musicales y los números estaban relacionados, y que las notas emitidas al vibrar por cuerdas del mismo tipo y sometidas a la misma tensión dependían simplemente de su longitud. Fue un gran descubrimiento sin precedentes; el primer indicio de que las leyes de la naturaleza pueden expresarse por números.

Se ha dicho en ocasiones que Pitágoras no hizo nada fundamentalmente nuevo, ya que los métodos de observación en astronomía eran muy utilizados antes de su época. Esta afirmación pierde de vista un hecho fundamental del trabajo de Pitágoras. En astronomía, se observa, se clasifican las observaciones, si es posible en forma numérica, y se hacen hipótesis para correlacionar lo observado. Si una hipótesis falla de acuerdo con nuevas observaciones, no es posible modificarla mediante nuestra intervención directa sobre el universo de los astros. Podemos refinar nuestros métodos de cálculo o de observación, pero esto es muy diferente del hecho de intervenir directamente sobre lo observado. En la ciencia que introdujo Pitágoras interviene el nuevo y decisivo elemento de interferencia positiva con la naturaleza. Pitágoras podía haber escuchado las armonías de la naturaleza con todo detalle durante toda su vida y no haber adquirido más sabiduría que sus ancestros. Pero cuando comenzó a manipular las longitudes de las cuerdas en busca de la explicación de sus sonidos, abrió las puertas a una nueva era en el método científico.

Hoy en día la teoría de la armonía está bien consolidada y ningún estudiante de música tendría que repetir el experimento de Pitágoras para comprobar su validez. Esa aceptación de los modelos matemáticos de la naturaleza es, sin duda, una de las características de la ciencia moderna que pudo haberse iniciado por los experimentos de Pitágoras. Lamentablemente, pocos de sus sucesores captaron el mensaje de que no es necesario apelar continuamente a la naturaleza para conocer su comportamiento si existen leyes que lo gobiernan. La inercia de tradiciones culturales y religiosas, y de una cierta manera de hacer ciencia, mantuvo casi hibernada la metodología iniciada por Pitágoras, hasta que Galileo, en el siglo XVI, restauró el espíritu científico de Pitágoras e inició formalmente el periodo de la ciencia moderna. A partir de Galileo, hechos aparentemente sorprendentes, como que dos bolas de plomo y de lana cualesquiera arrojadas desde la misma altura llegan al suelo al mismo tiempo†, fueron admitidos como verdades universales a través de las ecuaciones de la mecánica, cuya comprobación experimental sólo es necesaria para convencer a los incrédulos.

Es evidente que en la obtención de las leyes de la naturaleza en forma matemática a partir de experimentos, el observador está indisociablemente unido a lo que observa. ¿Cuánto de lo que el experimentador observa y mide se encuentra realmente en la naturaleza, y cuánto es producto de sí mismo y de los métodos que utiliza? La pregunta es, en definitiva, del mismo tipo que la mencionada antes con relación a la invención de los números. A Pitágoras no parece que le afectara esta cuestión, aunque si que lo hizo a Platón y otros filósofos posteriores, incluyendo los estudiosos de la metafísica de las ciencias

†Despreciando el efecto del rozamiento del aire y suponiendo la aceleración de la gravedad constante.

del siglo XX.

Un punto de consenso en el mundo científico son los límites del conocimiento basado en el experimento. El análisis más sencillo de un tejido celular con el microscopio más sofisticado altera las propiedades del tejido. Hay, por tanto, una región del saber humano que no tiene respuesta a través de experimentos. La pregunta ¿qué es la vida?, similarmente a la de la existencia de los números, puede parecer sin sentido o mal formulada a nuestros sucesores. Para Pitágoras, sin embargo, la ley de intervalos musicales pareció imbuirle del conocimiento sobre la verdad eterna de la propia existencia. ¿Quién podía sospechar que espacio, número y sonido pudieran combinarse en una única armonía? El espacio se asocia a la longitud de la cuerda, los números con las fracciones correspondientes a los intervalos musicales, y los sonidos se distinguen al escucharlos. ¿Cuál es la relación entre el oído y los números?, y más aun, ¿por qué algunas fracciones de los números están conectados con la armonía, que es un concepto estético? Todas estas ideas, aparentemente desconectadas, eran para Pitágoras manifestaciones de una única realidad: los números lo son todo.

La asumción de esta afirmación llevó a Pitágoras a tratar de expresar el cosmos en forma de números. Desde su escuela establecida en la isla de Crotona, durante más de treinta años, Pitágoras y sus discípulos desarrollaron toda clase de ingeniosas analogías entre el comportamiento de los fenómenos de la naturaleza y el de los números. Las historias que se derivan de su concepción del universo a partir de la primera docena y los primeros cuatro números son conocidas, y explicarlas aquí nos apartaría del argumento central de este relato. A efectos ilustrativos, simplemente mencionaré que a partir de su creencia de que todo son números, Pitágoras estableció su teoría del universo, en la que el número tenía el papel de Creador supremo. Los números pares eran femeninos y los impares masculinos, el número cuatro denotaba justicia, el siete virginidad, el seis la perfección, el tres la divinidad, etc. La numerología de Pitágoras abarcó también la descripción del espacio; el punto era el número uno, el dos la línea, el tres el plano y el cuatro el sólido. Su unión 1+2+3+4=10 era la decena prodigiosa que significaba todo el espacio.

Las limitaciones del universo pitagórico parecían no tener fin. Utilizando números o combinaciones de éstos, tales como fracciones obtenidas dividiendo un número por otro, Pitágoras consiguió expresar «todo» lo que le rodeaba en función de los números que se conocían en aquella época; es decir, los denominados números racionales formados por los propios números enteros y sus fracciones. A partir de esa gran generalización, se desprendía naturalmente que el lado y la diagonal de un cuadrado podían ser medibles por números racionales. Desgraciadamente, el sueño duró poco. Pronto se demostró que si el lado de un cuadrado se medía por un número (racional), la diagonal de aquél no era medible por otro número (racional). Esta evidencia destruyó para Pitágoras la simple generalización de que todo son números.

El problema de la diagonal de un cuadrado lo resolveríamos hoy en día diciendo simplemente que la raíz cuadrada de dos es un número irracional. En palabras de los matemáticos de la época inmediatamente posterior a Pitágoras, tales como Eudoxio (370 a.C.), diríamos que «la diagonal y el lado de un cuadrado no tienen una medida común». El descubrimiento de que la medida de ciertas longitudes finitas no era posible con las magnitudes clásicas, forzó a los matemáticos griegos posteriores a Pitágoras a abandonar la lógica de los números racionales y adentrarse en la exploración del concepto de infinito, introducido por Anaximandro, lo que condujo a la formalización inmediata de los denominados números irracionales (no expresables en forma de fracción).

La evidencia de que era imposible medir la diagonal de un cuadrado cuyos lados se expresan por números racionales, o que tampoco podía calcularse la longitud de una circunferencia cuyo diámetro fuera un número racional, desmontó la hipótesis de Pitágoras de que el universo podría expresarse por números conocidos. En el sentido más general, el universo aparecía como numéricamente «irracional». El sentido de la palabra irracional hay que tomarlo aquí con cautela, pues no significa tanto «contrario a la razón», sino más bien «contrario a los axiomas» (sobre los números) establecidos en la época. Este mismo espíritu de algunos hombres de poner en duda las leyes de la naturaleza, universalmente aceptadas en cada momento de la historia, ha dado lugar, sin duda, a los avances más espectaculares en ciencia y tecnología desde la época de Pitágoras hasta nuestros días.

La evidencia de que la verdad matemática está más allá de los axiomas y las reglas, ha sido defendida por numerosos científicos en todas las épocas. En tiempos cercanos a Pitágoras, sobre el año 475 a.C., Zenón de Enea inventó sus conocidas y controvertidas paradojas sobre el movimiento, tales como la que establece que en una carrera un corredor rápido nunca puede alcanzar a otro más lento, ya que, al llegar el más rápido al lugar del lento, éste ya habrá avanzado su posición. Las consecuencias de las paradojas de Zenón, al parecer inventadas sin ningún propósito, fueron en su tiempo demoledoras con los conceptos clásicos de espacio y tiempo, entendidos como formados por un número infinito de puntos o intervalos, y han influenciado a numerosos desarrollos posteriores en ciencia y filosofía. En 1914, el insigne Bertrand Russel afirmó que «los razonamientos de Zenón, de alguna manera, han propiciado casi todas las teorías sobre espacio, tiempo e infinito que se han elaborado desde sus días hasta nuestra época».

Muchos años después de Zenón, en 1931, el matemático vienés Kurt Gödel (1906-1978) explicó a su manera que para entender con total plenitud la naturaleza a través de las matemáticas, hay que salir de ellas. Utilizando un lenguaje matemático, Gödel demostró que un conjunto de axiomas suficientemente rico para incluir toda la aritmética, contiene necesariamente proposiciones indecidibles; es decir, contiene afirmaciones sobre la aritmética cuya verdad o falsedad no puede ser demostrada utilizando los axiomas conocidos. La demostración de Gödel sobre la inevitabilidad de la indecibilidad ha sido el acicate para muchas aplicaciones en otras áreas del pensamiento. En particular, se han discutido sus consecuencias para cualquier comprensión completa del universo por métodos matemáticos. Se ha afirmado que puesto que podemos «ver» la verdad de la sentencia de Gödel, esto necesariamente implica que la mente humana no puede ser un sistema formal y que, por consiguiente, los intentos más sofisticados de los denominados métodos de inteligencia artificial, basados en reducir el comportamiento de la mente humana a un conjunto finito de algoritmos, no pueden tener éxito. De hecho, las estribaciones más recientes del teorema de Gödel lo relacionan con las teorías aleatorias y el cálculo estocástico.

Es sumamente curioso e interesante observar la analogía entre las ideas de Gödel y las de Platón, del que hablaremos enseguida, sobre que la realidad de las matemáticas se encuentra fuera del hombre y es, por lo tanto, imperceptible por nuestros propios sentidos.

Vemos, por consiguiente, que el esfuerzo por parte de Pitágoras y sus discípulos de cuantificar el universo a partir sólo de los números racionales, se encontró muy pronto con evidencias de que su matemática era incompleta. Las sucesivas ampliaciones de la misma a través de los años y siglos posteriores, con la incorporación de los números irracionales, la adición del número cero, los números negativos, la aceptación del infinito, etc., permitieron a los científicos dar respuestas a cada uno de los misterios surgidos de las limitaciones de las teorías precedentes. Estos avances se han traducido paralelamente en la formulación de leyes de la naturaleza cada vez más sofisticadas y que, como en el caso de los números, ha sido necesario poner en duda cada vez que su aplicación se ha visto contradicha con la realidad física. Aceptando las conclusiones del teorema de Gödel, tenemos que admitir humildemente que nuestro conocimiento de la naturaleza sólo es posible en un sentido «irracional». Así, por muy sofisticadas que sean las nuevas teorías que aportemos al conjunto de las existentes, siempre aparecerán nuevos problemas cuya solución será indecidible utilizando los métodos conocidos. De nuevo, el hombre perseverante avanzará en sus descubrimientos, hasta llegar a una nueva encrucijada en la ciencia, y así sucesivamente. Este proceso es análogo a la de la búsqueda de todas las cifras de algunos números irracionales, como el número π del que en 30 siglos se ha pasado de conocer 15 cifras a varios millones, restando todavía por conocer todo el infinito de cifras restantes.

El devastador descubrimiento por los pitagóricos de que no todos los números son racionales (es decir, de la forma a/b, donde a y b son enteros), imprimió un importante cambio de rumbo en el desarrollo del razonamiento deductivo. Fue el inicio definitivo de las teorías matemáticas sobre la continuidad y el infinito, y, también, la ocasión para el desarrollo en pocos años de una nueva epistemología y la revisión de la antigua a través del trabajo de filósofos como Sócrates, Platón y Aristóteles. Los frutos de estas reflexiones sobre lo inconmensurable se recogieron de forma abundante en la geometría y el álgebra de Euclides, y los descubrimientos en matemáticas, física e ingeniería de Arquímedes, cuya influencia pervive hasta nuestros días. Todos estos avances tan relevantes ocurrieron en un periodo menor de tres siglos desde la muerte de Pitágoras, durante los cuales se cimentaron las bases de la ciencia que nos ha llevado hasta el progreso actual, y, posiblemente, de la que nos conducirá a un futuro mejor.

V

TRES SIGLOS GLORIOSOS

Los siglos III, IV y V a.C. acumularon en Grecia tal cantidad de científicos y pensadores relevantes que es difícil encontrar un periodo más fructífero para el avance de las matemáticas, la filosofía y la técnica, en general, hasta el siglo XVII de nuestra era, cuando Galileo, Newton y Leibnitz, recogiendo el testigo de los antiguos sabios griegos, sentaron las bases del moderno método científico para explicar las leyes de la naturaleza combinando la observación, las matemáticas y la experimentación.

Uno de los más fieles herederos de la cultura pitagórica fue Platón (427-347 a.C.). De hecho, aunque se le reconoce usualmente como alumno y discípulo de Sócrates (469-399 a.C.), Platón interiorizó la cultura de los números como el más ferviente seguidor de Pitágoras, aceptando su filosofía y ampliándola de tal forma que proporcionó una base racional para la afirmación de su predecesor de que «todo son números».

En su *República*, Platón ordenó una educación intensiva en matemáticas para los guardianes de su ciudad ideal, porque «todas las artes y las ciencias involucran números y cálculos». Dicha obsesión la llevó Platón también a la práctica en la vida cotidiana de su Academia, donde colocó a la entrada la famosa frase «no entre aquí ninguno que desconozca la geometría». Sea o no cierta esta historia, es otra evidencia de la importancia que Platón otorgó al dominio del razonamiento lógico para todos aquéllos que quisieran profundizar en el conocimiento de verdades más profundas.

«Las matemáticas», dice Platón, «agudizan la mente, y son sumamente valiosas como disciplina preliminar para el joven que se inicia en el arduo negocio de la filosofía, la argumentación dialéctica y la ciencia pitagórica (la numerología). Dicho entrenamiento es necesario para todos los que buscan el conocimiento, y prepara la mente para reconocer las realidades últimas frente a la evidencia de los sentidos». En ese aspecto, para Platón las matemáticas son un puente entre la nueva «opinión», basada en la percepción de las cosas, y el «conocimiento» derivado de su esencia, o verdad absoluta.

Platón fue quizás el más claro y lúcido ejemplo después de Pitágoras, de una vida dedicada a la interpretación del mundo a través de las matemáticas, y también, aunque en grado menor, a tratar de capturar la esencia de las ideas, las verdades matemáticas, a través de las experiencias de los sentidos. Su conclusión, compartida por tantos filósofos posteriores, de que «la realidad matemática se encuentra fuera de nosotros», enlaza con la creencia de que existe un universo matemático propio que el hombre puede ir descubriendo y explorando con la ayuda de la filosofía, y, más concretamente para Platón, de la dialéctica.

En el diálogo de Menón, Platón en boca de Sócrates trata de demostrar a Menón a través de una serie de ingeniosas preguntas sobre sumas y multiplicaciones hechas a un esclavo analfabeto, que puede despertar el conocimiento de las verdades matemáticas que dormían en el esclavo «como en un sueño». Sócrates concluye que, al ser el esclavo ignorante de las matemáticas, el conocimiento que demuestra repentinamente, sólo puede provenir de su existencia previa en el interior de su mente. Esto demuestra para Sócrates que el conocimiento matemático es eterno y que nuestras almas lo conocían antes de que al nacer en este mundo lo perdiéramos, aunque puede recuperarse mediante el estímulo y esfuerzo adecuados. Por lo tanto, las matemáticas no son una creación de la mente, sino que sólo son «recordadas». La gran conclusión del diálogo es que «si la verdad de todas las cosas siempre existía en el alma, entonces esta es inmortal. Así, Menón» -le sugiere Sócrates- «ponte manos a la obra y trata de recuperar lo que no sabes, o más bien no recuerdas». A esta fascinante sugerencia contesta Menón con un inusitado fervor: «Pienso que, de alguna manera, me gusta lo que dices». A lo que Sócrates responde con una memorable autofelicitación «Y a mí, Menón, también me gusta lo que digo».

Todas estas reflexiones ayudaron a Platón a confirmar su teoría del «realismo matemático». Puesto que sus Ideas eran «realidades» eternas, el sistema platónico es una especie de «realismo», pese a tratar sobre «entidades» ideales -las Ideas- situadas fuera de la experiencia de los sentidos.

La evidencia para Platón de las limitaciones de la mente para captar la «realidad objetiva» de las matemáticas queda explícitamente recogida en los diálogos de Fedón sobre igualdad «real». En dichos diálogos, Platón evidencia que los sentidos nunca permiten definir dos cosas como exactamente iguales. Aunque se utilicen los aparatos de medida más sofisticados, una comparación cada vez más detallada evidenciará siempre nuevas diferencias. No obstante, aunque la igualdad exacta está fuera del alcance de los sentidos, la mente no tiene dificultades en concebir la igualdad con absoluta exactitud. Si esta igualdad «real» es inaccesible a la observación de los sentidos, ¿qué es y dónde está?

Para Platón, la igualdad es una verdad eterna. Al ser invariable, la Igualdad real se convierte en la única idea que es posible conocer en todas las cuestiones sobre la igualdad. Cualquier intervención de los sentidos tratando de discernir sobre este tema, introduce un aspecto subjetivo en el conocimiento. Esta es la base platónica del concepto de «opinión», muy diferente del de «conocimiento» generado por la razón.

Esta diferencia entre conocimiento y opinión se ha reflejado en la historia de la ciencia a través de permanentes disputas entre los partidarios de la teoría y de la observación. Para un matemático «realista», la única parte de la ciencia que puede conducir al conocimiento de la verdad eterna son las matemáticas. Cualquier otra ciencia que dependa de la observación humana está en conflicto perpetuo consigo misma, como en posesión de una doble personalidad, enfrentada a la imposible tarea de separar las verdades absolutas de la nuevas opiniones generadas a través del conocimiento sensorial.

Quizás nadie como Descartes (1596-1650) asumió y defendió la realidad objetiva de los conceptos matemáticos. Un ejemplo ilustrativo es su visión de la Realidad a través de su Triángulo Eterno (Quinta Meditación). «Imagino un triángulo», dice, «aunque dicha figura quizás no existe ni ha existido en ningún sitio fuera de mi imaginación. Pese a ello, esa figura tiene una cierta naturaleza o forma, o una determinada esencia que es inmutable y eterna, y que yo no he inventado, ni, de ninguna manera, depende de mi mente. Esto es evidente porque yo puedo demostrar varias propiedades del triángulo, por ejemplo, que el ángulo mayor se opone al lado mayor, y así sucesivamente. Quiera yo o no, reconozco muy claramente que estas propiedades son del triángulo, aunque yo no hubiera pensado antes sobre ellas, e incluso aunque ésta fuera la primera vez que imagino un triángulo. Pese a ello, nadie puede decir que las he inventado o imaginado».

El triángulo misterioso cuyas propiedades Descartes imagina que no ha imaginado, es el Triángulo universal, esa Idea platónica particular en la que todos los triángulos imaginados por los sentidos participan, en virtud de su triangularidad. Otra prueba más de que las Ideas son entidades auto-existentes, extra-espaciales, extra-temporales, independientes de los hombres, incambiables, perfectas y eternas; no creadas por la mente pero comprensibles por ella, y «conocidas» sólo por medio de la razón, a través de la dialéctica, no a través de los sentidos.

Todo esto es claro y convincente para el matemático realista. Otros, es justo decirlo, lo encuentran deliciosamente naïve, aunque objetable. En muchos aspectos, la aceptación o rechazo de las teorías platónicas sobre la verdad matemática están más estrechamente ligados con las propias emociones que con la mera razón.

●

Uno de los críticos más agudos del realismo de Platón, fue su discípulo más inmediato Aristóte les (384-322 a.C.). Hijo de un político y educado en la medicina, Aristóteles a diferencia de Platón, no era congénitamente hostil a la ciencia empírica. Durante diecinueve años fue un alumno disciplinado de la Academia platónica. A la muerte de Platón en 349 a.C., y después de fracasar en su intento de erigirse en el sucesor natural de su legado científico, Aristóteles fundó su Liceo en competición directa con la Academia. Esta circunstancia, sumada a su mayor preferencia por las ciencias naturales frente a las bellezas de las matemáticas, pueden quizás explicar las razones de muchas de las críticas de Aristóteles a la filosofía de Platón, a quien básicamente acusó de plagiar a Pitágoras mediante una mera sustitución del concepto pitagórico de Número por el de Idea. Dada la escasa simpatía de Aristóteles por el trabajo de Platón esa acusación tiene seguramente poco fundamento.

Aristóteles, no obstante, es considerado por muchos como la inteligencia más vasta de su tiempo, y por sus propios trabajos merece ser reconocido como el gran impulsor de muchas áreas del saber de su época, tales como la anatomía y fisiología comparadas, la historia y la filosofía. Entre sus contribuciones en este último campo destacan el asentamiento de la lógica, mediante la invención del silogismo, cuyo influjo todavía perdura en nuestros días. Por otra parte, en aquellos tiempos de paganismo, Aristóteles admitió un dios supremo, personal, inmutable y omnipotente. La moral aristotélica hizo consistir el bien individual en la virtud, de la que dijo estar en medio de los extremos.

Lamentablemente, las contribuciones de Aristóteles a la teoría de los números no son particularmente relevantes. Postuló la concepción de los números como «colecciones de unidades», teoría que sólo pudo aplicar con éxito a los números naturales, ya que los irracionales, como la raíz cuadrada de 2, no pueden generarse a partir de otros números. En el aspecto científico-matemático su tratado de Física tampoco sentó las bases definitivas que favorecieron avances posteriores, conteniendo quizás demasiadas especulaciones, vacías de aspectos cuantitativos. Nada que ver con los textos sobre física escritos por Arquímedes cien años más tarde.

A la muerte de Aristóteles sobrevivió su escuela Peripatética, que quedó pronto olvidada al ser invadida Grecia por los romanos. Durante la Edad Media, los filósofos hispanoárabes Averroes y Avicena y el judío Maimonides comentaron el aristotelismo y lo difundieron por Europa. En el siglo XIII, Santo Tomás de Aquino lo incorporó definitivamente a las ideas cristianas de la época, que asumieron plenamente el credo aristotélico, lo que, por desgracia, no redundó en beneficio del avance de la ciencia medieval.

La disputa entre las ideas de Aristóteles y Platón se prolongó a lo largo de toda la Edad Media hasta el Renacimiento, y, de hecho, resurge de forma esporádica cada cierto tiempo, aun en nuestros días. La esencia de dicho enfrentamiento se centra en el diferente método propuesto por ambos para adquirir conocimientos e investigar la verdad. Platón especulaba sobre los misterios del universo, y de los principios universales descubiertos por el raciocinio y la intuición *deducía* las consecuencias y explicaba los fenómenos de la naturaleza. Aristóteles siguió exactamente el método contrario; es decir, primero observaba el fenómeno, el hecho, el objeto del mundo exterior, y de la observación *inducía* la ley o principio general.

Planteado el debate en esos términos, no es de extrañar que la doctrina cristiana medieval tomara partido en favor de los credos de Aristóteles. El límite superior del universo de las ideas de Platón configura la divinidad, la más alta Idea, poseída de una fuerza incorpórea, a partir de la cual es posible el conocimiento del mundo. Encajar esta creencia con las «verdades» inapelables de las sagradas escrituras fue quizás demasiado para los rígidos ortodoxos medievales. Era mucho más sencillo para éstos aceptar que cualquier fuente de conocimiento nos viene «revelada» a través de experiencias sensoriales, que suceden en el momento oportuno de la vida del hombre por voluntad del ser supremo. La mente, para los aristotélicos, está por lo tanto subordinada a la jerarquía del Creador, que se revela por medio de la percepción de los sentidos.

Desde la perspectiva de nuestros días, parece evidente que las escuelas platónica y aristotélica tienen puntos de razón y que, como en tantas otras cosas, la verdad se encuentra en algún lugar entre ambas. Alcanzar dicha zona de encuentro no fue, sin embargo, ni una tarea fácil, ni tan siquiera evidente. Tuvieron que transcurrir casi veinte siglos hasta que, agotada la falsa dialéctica medieval, se logró conciliar ambas escuelas durante los siglos XVI y XVII, en los cuales las mentes del Renacimiento lograron introducir el método científico, en el que la experimentación y el raciocinio aparecían como complementarios y ya no contrapuestos, sirviéndose uno del otro, y viceversa, para así descubrir y validar nuevas teorías.

Euclides de Alejandría

Durante su expedición a Egipto en el año 332 a.C., Alejandro Magno fundó la ciudad de Alejandría. Tras su muerte en el 323 a.C., se sucedieron una serie de luchas entre sus generales por el control de Egipto, resultando victorioso Tolomeo I a quien sucedió Tolomeo II, famoso por contraer matrimonio con su propia hija Arsina en el 276 a.C., demostrando así su asimilación total de las costumbres faraónicas. Fue también famoso por la fundación del Museo y la Biblioteca de Alejandría en donde floreció una comunidad de matemáticos cosmopolita, esencialmente de Grecia, Egipto y Judea.

Entre los sabios que Tolomeo trajo a Alejandría desde Grecia se encontraba Euclides.

Dotado de una facilidad extraordinaria para el razonamiento matemático, Euclides demostró la existencia de los números irracionales, tales como $\sqrt{2}$ y el número π cuya percepción había perturbado a Pitágoras, temeroso del desplome de su universo configurado únicamente tomando como base números racionales. Pese a ésta y otras importantes contribuciones, la fama de Euclides ha llegado hasta nuestros días principalmente por ser autor del famoso libro los *Elementos* (de geometría), probablemente el libro de texto más reeditado de la historia. Aunque la mayor parte del contenido de los *Elementos* era conocido antes de Euclides, la importancia del texto se encuentra en su método. Los *Elementos* son la primera catedral de la arquitectura matemática. Contiene las siguientes cinco piedras maestras, o postulados, que son aparentemente tan sencillos que cualquiera puede aceptarlos:

I Entre dos puntos puede dibujarse una línea recta que los une
II Un segmento rectilíneo puede extenderse a una línea recta
III Un círculo puede describirse con un centro y un radio
IV Todos los ángulos rectos son iguales
V Dada una recta y un punto no colocado sobre ella, no existe más que una línea que pasa por el punto y es paralela a la original.

Sobre estos postulados, Euclides construyó piedra a piedra su edificio con lógica de acero, asegurando que cada ladrillo se encontrara firmemente apoyado en los anteriores y que la catedral en su conjunto se apoyara firmemente en sus cimientos.

La influencia de los *Elementos* de Euclides en el desarrollo de la geometría en todas sus ramas ha sido enorme. Desde el punto de vista del cálculo, los métodos geométricos han sido la base para el cálculo de áreas y volúmenes, a partir de los cuales se concibieron los principios del cálculo infinitesimal. Hoy en día, la geometría juega un papel esencial en el desarrollo de los denominados métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales sobre un dominio con la ayuda del ordenador mediante técnicas de discretización. Dichas técnicas se apoyan en la división del dominio bajo estudio en formas geométricas sencillas, tales como tetraedros y hexaedros en el espacio, o triángulos y cuadriláteros, si se trata de un dominio bidimensional. Asimismo, la geometría es fundamental en relación con los métodos de representación gráfica de los resultados del cálculo en forma de sencillos gráficos o mapas de colores más complejos, dibujados sobre el dominio de análisis o en secciones del mismo.

No obstante lo anterior, el significado real del impacto de la geometría euclidiana se encuentra en el gran entrenamiento que proporciona para el pensamiento lógico, enseñando, por ejemplo, la diferencia entre si, y si y sólo si, y entre uno, y uno y sólo uno. Euclides no es así el padre de la geometría, sino el del rigor matemático.

Es interesante destacar un pequeño pero importante matiz con respecto a la universalidad de los cinco postulados, o axiomas, de la geometría de Euclides. La actitud de los antiguos griegos sobre aquéllos, fue esencialmente esta: «La verdad de los cinco axiomas es obvia, por consiguiente, todo lo que se deduce de ellos es también cierto».

La actitud de los científicos modernos es algo diferente: «Si suponemos que los cinco axiomas son válidos, entonces, todo lo que se deduce de ello lo es también».

A primera vista la diferencia entre ambas afirmaciones parece un pequeño tecnicismo, pero en realidad es mucho más profunda. En el siglo XIX se descubrió que si se eliminaba el quinto axioma de los cimientos de Euclides no se produciría el colapso de todo el edificio, y una parte de la geometría (denominada geometría absoluta) permanecía apoyada sobre los otros cuatro axiomas. Se encontró, asimismo, que si dicho quinto axioma se reemplaza precisamente por el opuesto, es decir, que es posible trazar más de una línea recta a través de un punto que sea paralela a otra línea recta dada, entonces sobre este extraño quinto axioma y los cuatro anteriores pueden construirse toda clase de edificios raros y bellos. Gauss (1777-1855). Lovacheveski (1792-1856), Riemann (1826-1866) y Bolyai (1802-1860) fueron algunos de los arquitectos de la denominada geometría no-euclídea.

El axioma no-euclídeo puede parecer ridículo, pero un axioma es indemostrable. Si pudiéramos demostrarlo no sería un axioma y estaría basado en un axioma (indemostrable) anterior. Todo lo que pedimos a un axioma es que esté libre de consecuencias contradictorias y, en ese sentido, la geometría no-euclídea lo está tanto como la euclídea. El hecho de que no podamos trazar dichas líneas paralelas en la forma usual no demuestra nada.

La realidad es que hay experiencias para las que la geometría euclídea es conveniente y otras para las que no lo es. Entre las primeras encontramos la mayor parte de las operaciones geométricas en el plano y en el espacio a «escala del hombre». Supongamos, no obstante, que queremos unir un punto A situado sobre esta página y otro B en una galaxia lejana. ¿Qué significado tiene la línea recta en este caso? Las experiencias demuestran que el rayo de luz que uniría los dos puntos cruzando campos electromagnéticos, no se comporta como la cuerda tensa que los uniría sobre, por ejemplo, un campo de fútbol. El comportamiento de dichos rayos fue descrito por la Teoría de la Relatividad de Einstein utilizando la geometría no-euclídea. Esta geometría es, en este caso, más conveniente para describir esas leyes de la naturaleza. Si tratamos de expresar dichas leyes en el espacio euclídeo tendrían formas mucho más complicadas, o bien, obligarían a reformular la teoría del electromagnetismo sin garantía de éxito, lo que no parece merecer la pena, después de las experiencias negativas de algunos físicos que lo han intentado.

Arquímedes de Siracusa

Arquímedes (287-212 a.C.) es probablemente el último gran representante de la escuela de pensadores de la antigua Grecia. Nació y vivió prácticamente toda su vida en Siracusa donde murió durante la toma de la ciudad por las tropas romanas.

Arquímedes es considerado por muchos como el padre de la física como ciencia, y también como el primer científico ingeniero: el hombre en busca de principios generales para aplicarlos a la solución de problemas concretos. En ese sentido podemos considerar a Arquímedes como el más claro precursor de los modernos métodos de cálculo.

Arquímedes estudió en la Universidad de Alejandría con los sucesores inmediatos de Euclides, o quizás bajo el propio Euclides. Fue siervo y amigo de Hierón II, rey de Siracusa, para el que diseñó numerosas máquinas de guerra utilizadas contra los romanos y cuya corona estuvo involucrada en el principio de empuje hidrostático que lleva el nombre de Arquímedes. Hierón sospechaba (correctamente) que su corona no era de oro puro y pidió a Arquímedes que lo investigara sin dañar la corona. Se cree que Arquímedes resolvió el problema mientras tomaba un baño, al observar el aumento del nivel de agua al sumergir su cuerpo en la bañera. Dice la leyenda que gritando ¡Eureka! (lo encontré) corrió desnudo por la calles de Siracusa para comunicar su descubrimiento a Hierón.

Su libro *Sobre Cuerpos Flotantes* fue mucho más allá del principio anterior e incluyó ejemplos complicados de flotación y estabilidad. En *El Equilibrio de los Planos* resolvió problemas geométricos complicados, tales como encontrar el centro de gravedad de un segmento parabólico. En estos y otros excelentes trabajos, Arquímedes utilizó el método de Euclides: de un conjunto de simples postulados deducía sus proposiciones con lógica impecable. No se sabe a ciencia cierta cuántos trabajos de Arquímedes se han perdido (uno de los más importantes, *El Método*, se descubrió en 1906), pero sus libros *Sobre Espirales*, *Sobre la Medida del Círculo*, *Cuadratura de la Parábola*, *Sobre Conoides y Esferoides*, *Sobre la Esfera y el Cilindro*, *El Libro de los Lemas* y otros, no tienen parangón en ninguna otra obra de la antigüedad.

La mayor parte de los trabajos de Arquímedes fueron motivados por encontrar la solución a problemas prácticos, generalmente de índole militar. Es admirable, al respecto, como supo combinar y ampliar conocimientos de matemáticas y física, llegando en muchos casos a soluciones generales, tales como fórmulas matemáticas de validez universal y, en otros, a resultados en forma numérica de problemas concretos. Como tal, Arquímedes bien puede ser considerado también el padre de la moderna matemática aplicada y más concretamente de los denominados métodos numéricos.

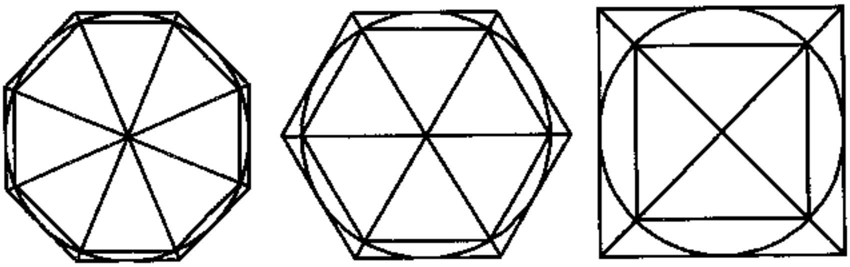
Lo que sí parece aceptado es que Arquímedes fue el precursor del cálculo diferencial e integral. Desde el concepto de «igual a», avanzó al de «arbitrariamente cerca de» o «tan cerca como se desee» (que Euclides había enunciado, pero no utilizado). Estas ideas tan avanzadas en su época progresaron muy lentamente a través de los casi veinte siglos posteriores hasta que Newton y Leibnitz formalizaron el cálculo infinitesimal en el siglo XVII.

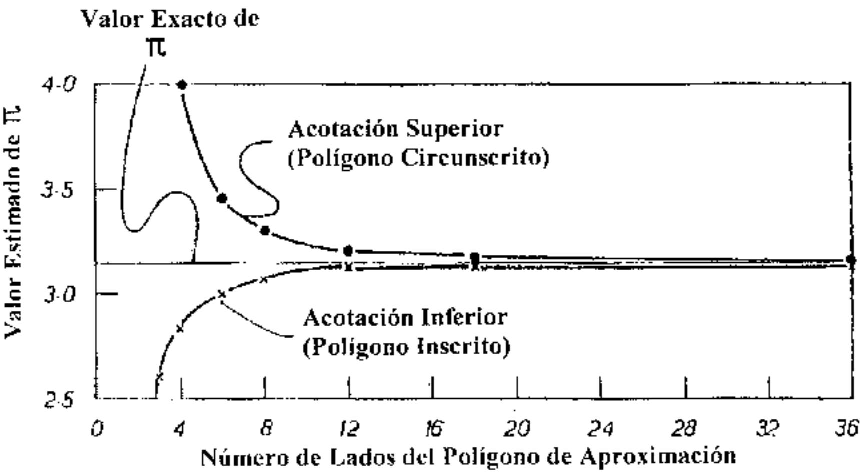
Arquímedes fue también el primero en proponer un método para calcular el número π con cualquier precisión. El procedimiento, precursor de los modernos métodos numéricos de discretización, se basa en el hecho de que el perímetro de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo es menor que la longitud de su circunferencia, mientras que el perímetro de un polígono similar circunscrito en el círculo es mayor que su circunferencia. Haciendo n lo suficiente grande, los dos perímetros aproximarán la longitud de la circunferencia, uno por defecto y el otro por exceso (Figura 1). Arquímedes comenzó por un hexágono y doblando progresivamente el número de lados llegó hasta un polígono de 96 lados, lo que dio

$$3{,}14084 < \pi < 3{,}14285$$

Aunque investigadores posteriores han encontrado aproximaciones numéricas más precisas al valor de π, el método poligonal de Arquímedes no fue superado hasta que diecinueve siglos más tarde el descubrimiento del cálculo infinitesimal condujo a un planteamiento totalmente diferente de la solución del problema.

Es importante entender que la solución que proporciona el método de Arquímedes es aproximada. Dado que el número π contiene infinitas cifras, sólo puede obtenerse un número concreto de éstas. El cálculo aproximado de π se obtiene sumando las longitudes de los lados de los polígonos y dividiendo por el diámetro de la circunferencia. Obviamente tomando un polígono de mayor número de lados mejora la aproximación de la longitud de la circunferencia y, consecuentemente, el valor de π calculado. Las gráficas de la Figura 1 muestran como mejora el valor de π comparado con el «exacto» (obtenido con 50 cifras decimales mediante el ordenador) aumentando el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos.





Curvas de convergencia de la aproximación a π

Figura 1. Método utilizado por Arquímedes para calcular el valor del número de π a partir del perímetro de polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia.

El método poligonal de Arquímedes tiene un particular interés en el contexto de esta historia, por ser, como ya hemos apuntado, el precursor de los modernos métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales.

Los métodos numéricos, de los que hablaremos más extensamente en otro capítulo, se basan en técnicas de discretización que esencialmente consisten en dividir la geometría del dominio de estudio en entidades geométricas sencillas, o elementos, tales como triángulos y rectángulos en dos dimensiones y tetraedros o prismas en tres. A partir del estudio de las propiedades de cada «elemento», y con la ayuda de los ordenadores para resolver los grandes sistemas de ecuaciones algebraicas resultantes, puede encontrarse la solución numérica del problema original sobre el dominio más grande. El proceso de discretización sería análogo al utilizado por Arquímedes al dividir la longitud de la circunferencia en polígonos inscritos o circunscritos. También, como en el caso de la estimación del número π, la solución que proporcionan los métodos numéricos es, usualmente, una aproximación más o menos buena de la solución «exacta».

Lo esencial es, sin embargo, que, hoy en día, con la ayuda de métodos numéricos, similares a los utilizados por Arquímedes, podemos llegar a cuantificar «la verdad» de la solución de un problema, con la suficiente precisión para tomar decisiones, pese a que el conocimiento «exacto» de dicha verdad sea generalmente imposible.

VI

LA LARGA TRAVESÍA

La toma de Alejandría por los romanos el año 212 a.C. marcó el inicio del fin de la era de esplendor de los matemáticos, científicos y filósofos griegos iniciada brillantemente por Pitágoras trescientos años antes.

La muerte de Aristóteles ese mismo año fue una premonición del final de la prestigiosa biblioteca de Alejandría, sucesivamente esquilmada por las tropas romanas bajo el mando de Julio César y Marco Aurelio, quienes, aprovechando sus galantes visitas a la emperatriz Cleopatra, organizaron varios cargamentos de libros y documentos desde Alejandría hacia Roma.

Vacía ya de la mayor parte de su contenido, la biblioteca de Alejandría sobrevivió todavía varios siglos, hasta que durante la conquista de la ciudad por los Árabes, en el año 646 d.C., todos los libros restantes fueron quemados, aparentemente por no ajustarse sus contenidos a los del Corán.

Las contribuciones del periodo romano al desarrollo de las matemáticas y el cálculo, fueron más bien escasas. Una de las figuras más renombradas fue Posidonio (135-51 a.C.) de origen sirio y educado en Atenas. Fue amigo y maestro de Cicerón y Pompeyo, y entre sus contribuciones está el cálculo con gran precisión del diámetro de la Tierra, siendo este valor el utilizado por Colón en su viaje al Nuevo Mundo.

Durante el dominio de Roma quedaron en Alejandría diversos matemáticos griegos, algunos de gran prestigio, tales como Apolonio (260?-200? a.C.), coetáneo y discípulo de Arquímedes, Erastótenes (275?-195?) quien determinó con notable precisión la longitud de la circunferencia terrestre, el astrónomo Tolomeo (II siglo a.C.), Herón (I siglo a.C.), Pappus (hacia 250 a.C.) y Diofanto (hacia 250 a.C.), famoso este último por su *Tratado de Aritmética* conteniendo numerosos problemas resueltos con sumo detalle. Parte de este trabajo sobrevivió a la destrucción de la biblioteca de Alejandría y sirvió de inspiración a Fermat (1601-1665) para el enunciado de su famoso teorema sobre la imposibilidad de encontrar una terna de números enteros que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$, para $n > 2$. (Recordemos que para $n = 2$ la ecuación constituye el famoso teorema de Pitágoras, siendo x e y las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y z la de la hipotenusa). El teorema de Fermat, cuya demostración presumía haber encontrado su autor, pero que no proporcionó («he encontrado una demostración absolutamente maravillosa, pero el margen de esta hoja es demasiado estrecho para incluirla», escribió Fermat), ha fascinado a la comunidad matemática durante trescientos años, hasta que el joven matemático inglés Andrew Wiles lo demostró, tan recientemente como en el año 1995.

Todos los nombres anteriores, en definitiva, configuraron la denominada «edad de plata» de los matemáticos griegos, muy por debajo de la de oro de sus predecesores Pitágoras, Platón, Euclides y Arquímedes.

Pese a estos esfuerzos, las matemáticas griegas, como también otras ciencias, fueron desvaneciéndose lentamente bajo el yugo de Roma. Fue el preludio de un largo periodo de tinieblas en Europa que se iba a extender a lo largo de muchos siglos posteriores.

Sería excesivo detallar las extravagancias y excesos de la razón pura cometidos en Europa a través del sombrío periodo de la Edad Media. Todo empezó quizás unos años antes con la nociva invención del neo-pitagorismo por un grupo de fervientes seguidores de Pitágoras, impregnados, desgraciadamente, de confusas ideas místicas, en muchos casos contradictorias.

Los neo-pitagóricos florecieron durante el I y II siglo d.C. Fueron, según ellos, los legítimos herederos de los misterios numéricos pitagóricos, llegando hasta la falsificación de cartas y documentos con el nombre del maestro para convencer a los incrédulos. Para los neo-pitagóricos nada de lo que se podía decir sobre números era absurdo y , ciertamente, intentaron decir todo lo que un numerólogo demente podría expresar en su delirio. No había para ellos teoría metafísica que no pudiera demostrarse por su mística magia de los números. Un claro preludio del nefasto sagrado misticismo de los números que invadió posteriormente a los teólogos medievales.

Los neo-pitagóricos hubieran sido un grupo bastante inofensivo de no haber inspirado y propiciado a los más intelectuales gnósticos. Haciendo honor a su nombre -»los que saben»-, los gnósticos pretendieron tener un conocimiento intuitivo y misterioso de las cosas divinas. El fondo del gnosticismo era la doctrina de la emanación y de la vuelta al primer principio por la vía de la redención. Los gnósticos ejercieron una gran influencia sobre todo el conocimiento de los primeros cinco siglos de la era cristiana. Desde Alejandría, donde establecieron su cuartel general, mezclaron la religión cristiana con creencias judaicas y orientales, aceptaron todas las supersticiones, todas las «ciencias», tanto en cuanto no fueron científicas, y todas las teogonías, en su amalgama de conocimientos contradictorios y esotéricos. El gnóstico más destacado fue Corinto (siglo I), que consideraba el mundo como obra de un espíritu o eón superior.

El único aspecto que dio a la miscelánea de mitos y supersticiones contradictorias de los gnósticos un rasgo de coherencia, fue la antigua numerología pitagórica, sublimada por los neo-pitagóricos, y en sí misma incoherente. Aun lo fue más todavía, cuando mezclaron esta con la guematría, una variante hebrea de la numerología basada en la peculiaridad que presenta el alfabeto hebreo de escribir los números con letras, lo que ofrece infinitas posibilidades para expresar el significado de una frase, bien con palabras o mediante números.

Cuando los sabios gnósticos percibieron que el cristianismo estaba adquiriendo una fuerza intelectual que más pronto o más tarde tendrían que reconocer, dieron la bienvenida a la joven religión a su mundo de medio-cultos y credos. Afortunadamente, los padres del cristianismo no aceptaron esta agresiva hospitalidad y denunciaron a los gnósticos como una banda de filósofos griegos degenerados y herejes que habían tomado los nombres y la obra de Pitágoras, Platón y Aristóteles en vano. Más aun, los líderes intelectuales de la nueva religión cristiana rechazaron todos los conocimientos que los presuntos sabios gnósticos pudieron ofrecerles, con una única excepción. Dicha excepción, afortunadamente para la ciencia de los diez tormentosos siglos posteriores, fue la numerología.

La consecuencia natural del neopitagorismo y el gnosticismo fue el neo-platonismo, mezcla de una inestable numerología cruda y la metafísica mística originada en Roma con Ammonio Saccas (175-242) y Plotino (205-270).

El neo-platonismo se ha denominado por algunos el tercero y último periodo de la filosofía griega. Considerado simplemente como filosofía, Platón no lo hubiera quizás reconocido. Quien, seguramente si lo hubiera hecho con una gran sonrisa de satisfacción, sería Aristóteles, quien, impulsado por los neo-platónicos, extendió la influencia de sus teorías antinuméricas a lo largo de toda la Edad Media.

Los neo-platónicos confundieron el judaísmo, el helenismo y las ciencias y religiones orientales en un todo sublime e inconsistente, a partir del cual intentaron sin éxito explicar el antiguo dualismo entre apariencia y realidad, tan claramente expuesto por Platón. Sobre este tema elaboraron nuevas teorías en las que el sujeto y el objeto se hacían uno, y el conocimiento sólo era posible por unión con la «deidad». A partir de una intrincada teología del politeísmo, los neo-platónicos procedieron con su propia parodia de la dialéctica platónica, hasta una síntesis confusa de toda la filosofía clásica.

De todos los charlatanes, magos místicos autointoxicados y lógicos eclécticos que se unieron al neo-platonismo sólo mencionamos a Proclo (412-485) de Constantinopla, Alejandría y Atenas, precursor e inspirador místico de los filósofos y numerológos cristianos de la Edad Media. Su vida fue la del piadoso agresivo que una vez gozó de la visión de la filosofía verdadera, y que desde entonces insiste en sacar los ojos de los que aún pueden ver. Su misión, en la que trabajó prodigiosamente, fue la seducción de cristianos conversos a su excitante y sutil numerología de la naturaleza y del alma. Pretendiendo que sus fórmulas sin sentido tenían poderes mágicos, publicitó su aparente control sobre los espíritus y el mundo material, y sugirió que otros podrían ejercitar similares, o incluso, mayores poderes. Esta especie de cuento de las mil y una noches, obviamente era más subyugante para sus prosélitos que las austeras enseñanzas de los maestros cristianos, lo que hizo a Proclo muy impopular entre sus influyentes rivales. Expulsado de Atenas pasó unos años en el exilio para regresar de nuevo, más obstinadamente piadoso en su manera perversa, pero también más discreto. Habló menos y escribió más.

En su elevada aritmética del alma, Proclo inauguró el denominado método científico de la Edad Media. Durante mil años, la numerología reforzada por una dialéctica intrincada, combatió duramente y con éxito en toda Europa para usurpar las funciones de la observación y el experimento.

Afortunadamente para Europa, otros hombres en países tan lejanos como China y la India, prosiguieron el avance inexorable de las matemáticas y los métodos de cálculo. Si aquellos tuvieron, o no, conocimiento de las aportaciones de los griegos, es poco relevante, aunque la opinión más generalizada, es que sus descubrimientos fueron completamente independientes. El hecho esencial es que la salvación de Europa llegó a través de dichas remotas culturas y de la mano, paradójicamente, del gran enemigo de la cristiandad en la época medieval.

Congelemos, pues, por un instante la escena europea en el inicio del medievo, para dar un breve paseo por el conjunto de culturas no europeas que tanto iban a significar para el futuro de la ciencia y la técnica occidental.

El resplandor de otras culturas del número

Durante el período que habitualmente se denomina Alta Edad Media, y que comprende desde el fin del Imperio romano, sobre el año 476, hasta finales del siglo IX, Europa occidental, devastada por las epidemias, el hambre y las guerras, se hundió en el más profundo caos político, en la economía de la mera subsistencia y en el oscurantismo medieval más completo.

Los conocimientos científicos de la época eran muy elementales, por no decir, casi inexistentes. Los escasos privilegiados a los que se proporcionaba una «instrucción» aprendían primeramente a leer y escribir. A continuación se les enseñaba gramática, dialéctica y retórica, y, a veces, también música. Después se les daban cursos muy superficiales de astronomía, geometría y aritmética.

Esta situación contrasta con el auge de las matemáticas y el cálculo en culturas tan remotas de la europea , como la china, la maya, la hindú y la árabe.

Los chinos han sido siempre unos fervientes creyentes en la mística de los números. Desde los tiempos más remotos (II milenio a.C) existen referencias de que muchos signos de la numeración china arcaica, tan ligada con la actual, tuvieron en esencia un origen mágico y religioso. Así, el grafismo de cada signo representaba las «realidades» del número correspondiente.

La importancia de la influencia china en el desarrollo de las matemáticas y el cálculo se centra, fundamentalmente, en el hecho contrastado que desde las épocas de los Han (206 a.C.-220 d.C.) los sabios chinos utilizaron un sistema de numeración decimal denominado suan zi («cálculo con fichas»). Pese a ello, este sistema no incluyó el cero hasta los albores del siglo VIII d.C., por influencia, sin duda, de los misioneros budistas de origen indio.

Existen numerosas referencias de la destreza de los calculistas chinos. Una de las más antiguas data del siglo V d.C. En esa época el ingeniero y matemático chino Tsu Ch'ung-Chih (nacido hacia el año 430 d.C.) evaluó con gran precisión el área del círculo sumando simplemente las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos progresivamente más pequeños, lo que permitió acotar el valor del número π entre 3.1415926 y 3.1415927 (Figura 2). Este procedimiento es muy similar al utilizado por Arquímedes para calcular el valor de π a partir de la aproximación de la longitud de la circunferencia por líneas poligonales (Figura 1). Ambos métodos de aproximación son claros predecesores de los modernos métodos de discretización utilizados en la actualidad por la mayoría de métodos numéricos.

La cultura aritmética china es también reconocida por ser la primera que introdujo herramientas auxiliares para el cálculo. Uno de los primeros instrumentos del que existen referencias en el siglo IX de nuestra era es el denominado *damero chino o tablero numérico de palillos*, con el que los chinos efectuaban operaciones aritméticas colocando sobre sus cuadrados bastoncillos de marfil o bambú denominados chon (literalmente, «fichas de cálculo»). Este instrumento fue el precursor del famoso contador de bolas, de creación relativamente reciente (hacia el siglo XIV d.C.), y que es todavía muy popular y utilizado hoy en día en todo Extremo Oriente por gentes de los más diversos estamentos

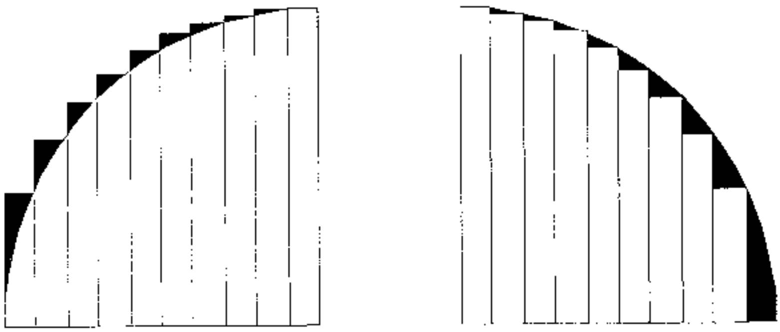


Figura 2. Aproximación del área del círculo y del número π mediante suma de áreas de rectángulos inscritos y circunscritos. Este método fue utilizado por matemáticos e ingenieros chinos en el siglo V d.C.

sociales, debido a la facilidad para realizar con él todas las operaciones aritméticas de forma rápida y simple.

A efectos de este relato, la importancia de la cultura científica maya no es relevante, ya que aparentemente no tuvo contacto con el Mundo Antiguo, ni, por tanto, influyó en el desarrollo de otras civilizaciones posteriores, salvo en la azteca, de fin tristemente conocido. Pese a ello, es justo reconocer que, entre los siglos IV y IX de nuestra era, el genio de la cultura maya alcanzó en matemáticas y astronomía unas cotas muy elevadas, reflejadas entre otros logros, por la elaboración de una numeración de posición, de base vigesimal y la invención del cero. Ambos descubrimientos fueron desconocidos para la mayoría de los pueblos, y sobre todo para los occidentales, que tuvieron que esperar a bien entrada la Edad Media para que estos conceptos les fueran transmitidos por los árabes, quienes a su vez los habían recibido de los eruditos indios.

La superioridad de babilonios, chinos y mayas sobre otras culturas antiguas, como la de los egipcios, hebreos y griegos, es un hecho incontestable: mientras los primeros ocuparon desde fechas tempranas posiciones avanzadas por descubrimientos tan fundamentales como el principio de posición y el cero, los otros quedaron atrapados durante muchos siglos en unas numeraciones primitivas, incoherentes e inoperantes en casi todos los ámbitos, excepto, claro está, en el de las escrituras contables.

La civilización hindú merece un punto y aparte, ya que a ella le debemos la obra maestra de nuestra numeración moderna. Aunque no existe unanimidad sobre la fecha, lo más probable parece ser que esta numeración nació en la India a mediados del imperio de los Gupta, dinastía que reinó en todo el valle del Ganges y sus afluentes desde aproximadamente el año 240 al 535, gracias a la conjunción de las tres grandes ideas siguientes:

- la idea de dar a las cifras de base unos signos gráficos desligados de toda intuición sensible, que no evocan visualmente el número de unidades representadas.
- la utilización de la numeración decimal de posición, asignando a las cifras base un valor que cambia atendiendo al lugar que ocupan en las representaciones numéricas.
- y, por último, la creación de un cero totalmente «operativo», es decir, que permite reemplazar el vacío de las unidades que faltan y tiene a la vez el sentido de «número nulo».

Ciertamente, aunque algunas culturas descubrieron antes que la hindú algunas de las características anteriores, ninguna como ella supo ni pudo reunir en un sistema completo y coherente el conjunto de condiciones necesarias y suficientes para conseguir una numeración provista de las mismas potencialidades que tiene la que utilizamos en nuestros días.

Esta aportación fundamental modificó por completo la existencia del ser humano, ya que permite expresar de forma simple y coherente todos los números, ofreciendo la posibilidad de efectuar sin dificultad cualquier tipo de cálculos. A partir de ese momento, se pudieron efectuar operaciones hasta entonces irrealizables, abriéndose, en consecuencia, la vía al desarrollo de las matemáticas, la ciencia y la técnica.

Provistos de este potente instrumento, los matemáticos hindúes llegaron a ser unos virtuosos del cálculo aritmético y algebráico; virtuosismo que unido a su talante poético y a su superficialidad lógica, les permitió concebir un nuevo tipo de símbolos para representar la ausencia de valor y a los que, posteriormente, en Occidente, se les llamó «números negativos».

Al parecer, los matemáticos chinos también poseían la idea de número negativo y estaban acostumbrados a calcular con ellos, utilizando varillas negras para representar los números negativos y rojas para los positivos. No obstante, la primera referencia escrita de las reglas de aritmética de números negativos es una obra del matemático hindú Brahmagupta (siglo VII), que data del año 628.

Lamentablemente, las aportaciones de la cultura matemática india, ya desarrollada a mediados del siglo V d.C, tardaron casi cinco siglos para que las nueve cifras significativas se transmitieran a la Europa cristiana. Todavía tuvieron que transcurrir dos o tres siglos más antes de que hiciera aparición el cero, junto con los métodos de cálculo indios, y un lapso de tiempo aún más considerable antes de que estas novedades revolucionarias fueran aceptadas por el mundo occidental. De hecho, la influencia de la civilización india no llegó a Europa directamente, sino a través de los sabios arábigo-musulmanes que transmitieron la ciencia india, desempeñando así, entre otros papeles, el de intermediarios entre ambos mundos.

De entre los innumerables científicos árabes que contribuyeron a la difusión de las cifras y los métodos de cálculo de origen indio, tanto en el mundo occidental como en el occidente cristiano, destaca el matemático Al-Khuwarizmi (783-850). Su vida transcurrió en la corte del califa abasí Al-Má mun, poco tiempo después de que Carlomagno hubiera sido nombrado emperador de Occidente, y fue uno de los miembros más importantes de un grupo de matemáticos y astrónomos que trabajaron en la Academia de Ciencias de Bagdad.

La contribución científica de Al-Khuwarizmi se centra en dos obras fundamentales. La primera de ellas, titulada *Al jabr wa'l muqabala*

(Transposición y reducción) estaba dedicada a los procedimientos fundamentales de la ciencia algebraica. Este libro, traducido en la Edad Media al latín fue muy célebre en su tiempo, hasta el punto de que a él se debe el nombre mismo de *álgebra*. La otra obra de Al-Khuwarizmi se denominó *Libro de la Adición y la Sustracción según el Cálculo de los Indios*, y aunque el original desgraciadamente se ha perdido, queda su traducción latina realizada a partir del siglo XII. Este libro fue el primero en que se dan explicaciones detalladas con numerosos ejemplos de la numeración decimal posicional y de los métodos de cálculo de origen hindú. Como el anterior, gozó más tarde de tal prestigio en toda Europa Occidental que el nombre mismo de su autor sirvió para designar de forma genérica el nuevo sistema de cálculo. Así, Al-Khuwarizmi latinizado se convirtió en Algoritmo, nombre que indicó inicialmente el sistema constituido por el cero, las nueve cifras significativas y los métodos de cálculo procedentes de la India, antes de adquirir la acepción más amplia y abstracta que hoy le atribuimos.

Así, sin saberlo, el título de esta obra de Al-Khuwarizmi sirvió para denominar una rama fundamental de las matemáticas denominada la algoritmia, que es la base sobre la que se apoyan los métodos de cálculo por ordenador de nuestros días.

La gran obra de Al-Khuwarizmi fue proseguida por otros muchos sabios árabes. Entre ellos destacan el matemático, astrónomo, físico y geólogo Al-Biruni (973-1048), quien después de pasar largas temporadas en la India redactó un largo texto sobre esta civilización y numerosas obras de astronomía, aritmética y matemáticas; el matemático Al-Karaji (siglo X), quien obtuvo importantes resultados sobre la aritmética de las fracciones, y, apoyándose en los trabajos de Diofanto, escribió un importante libro de álgebra; el filósofo Avicena (980-1037), espíritu universal que se interesó tanto por la filosofía, como por las matemáticas y la filosofía aristotélica; el filósofo judío Maimonides (1135-1204), originario de Córdoba, cuyo interés enciclopédico abarcó la astronomía, las matemáticas y la filosofía, y el también filósofo e insigne cordobés Averroes (1126-1198), a quien debe la filosofía árabe su más pleno desarrollo. Además de importantes obras en defensa del estudio filosófico de la religión, Averroes escribió comentarios sobre muchas obras de Aristóteles, y sobre la República de Platón, teniendo, sobre todo la primera, una profunda influencia en la europa medieval.

Los árabes no se contentaron con conservar los fondos culturales griego, babilónico, chino o indio. También aportaron su propia contribución al gran edificio de la ciencia y, en particular, a las matemáticas y el cálculo. Reuniendo, traduciendo y estudiando cuidadosamente las obras del pasado, añadieron diversos comentarios, y, con frecuencia, enriquecieron sus explicaciones con desarrollos originales, siempre con un espíritu crítico que rechazaba todo dogmatismo estéril. Es así como en sus matemáticas se fueron mezclando los métodos griegos con los indios, mediante combinaciones que incluirán, a veces, procedimientos babilónicos, o, incluso, aunque esto más tardíamente, otros de origen chino. Así, los árabes supieron reunir, con gran espíritu de síntesis, el rigor sistematizador de los matemáticos y filósofos de la antigua Grecia, con el carácter práctico de la ciencia india. De ahí los notable progresos efectuados en aritmética, en álgebra, en geometría, en trigonometría y en astronomía.

Gracias al conjunto de aportaciones de los sabios del Islam, en los planos cultural, filosófico, científico y técnico, generalmente mal conocidas por el gran público occidental, el mundo europeo pudo iniciar, a partir de los siglos XI y XII, su renovación intelectual, antes de conocer el formidable desarrollo que le conduciría a franquear la etapa más decisiva de la historia del pensamiento científico.

Pero, regresemos de nuevo a Europa. Es todavía el inicio de la Edad Media y el mundo europeo se debatía en el marasmo de las ideas del neo-pitagorismo y el neo-platonismo combinadas a veces, y otras enfrentadas, con las verdades reveladas de las sagradas escrituras.

Números y cristianismo medieval

Al avanzar gradualmente el cristianismo frente al paganismo, el misticismo de los números de Pitágoras cambió su objetivo, pero no su técnica fundamental. Aceptando los números como la autoridad suprema en lo que denominaban ciencia, los escolares eclesiásticos elaboraron sus propias acepciones de la antigua numerología, como ayuda para entender las sagradas escrituras, y también en honor de la honestidad teológica, como prueba de que las escrituras son revelaciones verdaderas de la palabra divina. Así, en la escolástica medieval, como en el antiguo pitagorismo y en algunos aspectos del platonismo, el número podía llegar a ser más importante que la deidad. Con una excepción: los números se consideraban siempre creaciones divinas y nunca productos del hombre. Esta creencia no debe sorprendernos si recordamos lo que algunos matemáticos del siglo XX piensan sobre la naturaleza de las matemáticas.

Antes de seguir adelante conviene remarcar que aunque pueda parecer ridícula la numerología de algunos de los nombres propios importantes de este periodo, todos ellos fueron grandes hombres. Personajes como San Agustín, Alberto Magno y Santo Tomás de Aquino son reconocidos universalmente como intelectualmente iguales a los mejores hombres de cualquiera época. Su numerología fue solamente una etapa en su actividad febril, y quizás, desde nuestra perspectiva, puede parecernos extraño que estos gigantes del pasado tomaron el misticismo de los números con la seriedad devastadora que lo hicieron. De la misma manera, puede parece incluso más extraño a nuestros sucesores de aquí a unos siglos, que hayamos aceptado las ciencias empíricas sin una duda o una sonrisa.

La numerología como método ortodoxo de investigación en la primera teología medieval proviene de San Agustín (353-430), un hombre de gran intelecto, según creyentes e infieles. Nacido pagano, San Agustín retuvo parte de su alegría de vivir incluso después de convertirse en el campeón de su religión adquirida. «Señor», oraba, «hazme casto, pero no todavía». Después de un entusiasta estudio de Platón, San Agustín aplicó sus esfuerzos a que la numerología fuese aceptada como la ciencia básica en la que se apoyase la teología cristiana. El número era para él la esencia de la verdad y la razón. Consecuentemente, San Agustín hizo un análisis numerológico exhaustivo de la Biblia con el fin de interpretar correctamente todos los unos, dos, tres, cuatros, sietes, dieces, cuarentas y otros números que abundan en las escrituras.

Muchos de los significados que San Agustín creyó detectar en los escritos sagrados estuvieron influencionados por las fantasías de la escuela neo-pitagórica. No obstante, cuando ascendió a los niveles más altos del misticismo de los números, sus descubrimientos coinciden sustancialmente con los de Platón y los modernos pitagóricos. «Es obvio para la inteligencia más preclara», afirmó, «que la ciencia de los números no fue creada por el hombre, sino descubierta por la investigación». Desde esta creencia y su numerología de las escrituras, concluyó que el número es el cimiento inmovible del Absoluto, y que la deidad es el Gran Numerólogo, quien conoce todos los números porque su conocimiento es infinito, y a la inversa, la deidad lo sabe todo porque conoce todos los números. El número es, por tanto, necesario y suficiente para la existencia de la deidad.

Algunos de los razonamientos profundos de San Agustín y sus seguidores sobre las sagradas escrituras pueden parecer ligeramente blasfemos a un teólogo moderno, pero para su tiempo no lo eran. Sólo fueron esfuerzos sinceros de pensadores por convencerse que las escrituras eran ciertas, que la naturaleza rompió sus reglas y que los milagros ocurrieron. Tampoco es extraño que estos creyentes buscaran apoyo a la revelación en la única «ciencia» que conocían -la numerología-, cuando lo mismo sucede hoy en día, cuando se apela a las últimas teorías científicas para defender ciertas ideas.

Comparados con sus predecesores, los matemáticos del inicio de la cristiandad y del posterior periodo medieval fueron poco relevantes. Prácticamente todos fueron fervientes creyentes en el aura de los números. Siguiendo los métodos de neo-pitagóricos como Nicomaco (I siglo), la mayoría de escolares prestó más atención a los supuestos misterios de los números que al lado práctico de la aritmética. Todos parecieron estar convencidos de que el número es la llave de todas las ciencias y todas las filosofías, y ninguno de ellos dudó de su origen celestial.

Entre los numerólogos más destacados de la época sobresale Boecio (480-524) quien fue el último gran escolar romano que comprendía griego. Más conocido por su libro *De Consolatione Philosophie*, compuesto en prisión, en su numerología Boecio se adhirió a la fe pura del propio Pitágoras. «Todas las cosas», afirmó, «parecen estar formadas por números».

Boecio no fue sólo un aritmético místico, sus manuales elementales de aritmética, astronomía, geometría y música -las cuatro ciencias pitagóricas- tuvieron una gran influencia, no particularmente positiva en toda la Edad Media. Sus traducciones de Aristóteles fueron casi la única conexión directa entre la filosofía griega clásica y la teología medieval. Sin duda, estas traducciones fueron muy responsables de la enorme influencia de la filosofía de Aristóteles sobre la mente de clérigos y escolares medievales. Si Boecio hubiese logrado también transmitir algunos de los diálogos de Platón, la historia de la cultura europea podía haber sido bastante diferente de lo que conocemos.

Después de servir fiel y completamente al rey gótico Teodorico, como ministro y cónsul, fue ejecutado de forma brutal. Oficialmente el cargo fue de traición. Al parecer Boecio fue condenado a muerte por ser incorruptible.

Inmediatamente posterior a Boecio, San Isidoro (560-636), obispo de Sevilla, reforzó la propagación del mensaje pitagórico mediante una erudita enciclopedia de los números que aparecen en las sagradas escrituras. Siguiendo a San Agustín, San Isidoro explicó la doctrina cardinal de los antiguos pitagóricos de que todas las cosas están contenidas en los diez primeros números. Puesto que éstos están generados por el número uno, dedujo que, de acuerdo con las ideas neo-pitagóricas, todo es o debería ser eternamente Uno con la deidad.

Pese a esos esporádicos ejemplos, el panorama científico y artístico en Europa durante la Alta Edad Media fue más bien desolador. Como una muestra, la aritmética durante esa época medieval consistía esencialmente en el uso de la vieja numeración romana y en la práctica de operaciones por medio de guijarros o fichas sobre el abacus heredado de los romanos, incluyendo asimismo la forma de contar con los dedos transmitida por el propio San Isidro.

Sin embargo, en los siglos XI y XII se produce en Europa un cierto despertar del letargo medieval; el crecimiento demográfico conduce a la ampliación de las tierras cultivables, al desarrollo de las ciudades y de las órdenes monásticas y al impulso del comercio. Los contactos internacionales y, sobre todo, las Cruzadas favorecen entonces la introducción de la ciencia árabe en Occidente.

En esa época, el monje francés Gerbert d'Aurillac (945-1003) fue una de las personalidades más sobresalientes. Dotado de un espíritu penetrante y de una viva curiosidad científica, se formó inicialmente en matemáticas y astronomía. Después de una estancia en la España musulmana, entre los años 967 y 970, se interesó por las enseñanzas de los maestros árabes, aprendiendo a manejar el astrolabio, un instrumento científico del que los árabes se sirvieron para sus observaciones astronómicas, así como por el sistema de numeración y los métodos de cálculo de origen indio. Más tarde fue consejero del papa Gregorio V y tras ocupar diversos arzobispados fue elegido papa en el año 999 con el nombre de Silvestre II.

Gerbert d'Aurillac introdujo por primera vez las cifras «árabes» en la europa occidental. Desgraciadamente su aportación se limitó a las nueve cifras significativas, prescindiendo del cero y de los métodos de cálculo indios. La explicación de esta extraña circunstancia, que tanto retrasó el progreso de al ciencia europea, fue la resistencia y el conservadurismo de los pueblos cristianos, aferrados a la cultura de la numeración romana.

El papa Silvestre es también responsable de la mejora del método de cálculo basado en el *abacus* romano que, a partir de entonces, pasó a denominarse *abacus* de Gerbert.

Gerbert d'Aurillac no escapó a las consecuencias del espíritu retrógrado de la época. Se dijo de él que practicaba la alquimia y la brujería, y que habiendo ido a probar la ciencia de los «infieles sarracenos», sin duda había vendido su alma a Lucifer. Esta grave acusación le persiguió hasta después de muerto, llegando incluso la autoridad pontificia a juzgar necesario ¡en 1648! abrir su tumba y exhumar sus restos para comprobar si entre ellos moraban aún los demonios.

El esfuerzo del papa Silvestre no fue, sin embargo, en vano. Las primeras luces del alba en la noche medieval que aportó su obra, iluminaron el camino de muchos en el lento retorno de Europa a la actividad de la existencia. Este resurgimiento del espíritu occidental se produjo paradójicamente bajo el signo de la cruz, el mismo que indirectamente la había mantenido en tinieblas, en tiempos del rey Ricardo Corazón de León (1157-1199).

Reconquistar la ciencia y la cultura no era en absoluto el objetivo de las Cruzadas, sin embargo, ese fue precisamente el resultado de aquellas guerras insensatas. Desde 1005 hasta 1270, los poderosos príncipes y caballeros cristianos trataron de imponer por la espada su religión y sus tradiciones a los «infieles» de Oriente. Pero en lugar del resultado previsto, los cruzados regresaron, por el contrario, impregnados de la cultura que fueron a combatir a Tierra Santa. Así, en definitiva, fueron las Cruzadas las que permitieron dar el paso, que ni la ciencia ni la voluntad del papa Silvestre había conseguido: imponer a Occidente el cero y el cálculo.

A partir del siglo XII comenzaron a difundirse en España los contenidos de libros árabes y de obras griegas o indias previamente traducidas al árabe. Los contactos culturales entre ambos mundos se multiplicaron, aumentando día a día el flujo de europeos deseosos de instruirse en aritmética, matemáticas, astronomía, ciencias naturales y filosofía.

Lenta, pero firmemente fue asentándose a lo largo de los siglos XII y XIII el conocimiento en Europa de las obras de los matemáticos y filósofos griegos y, en particular, las de Euclides, Arquímedes, Tolomeo y Aristóteles, así como sabios árabes como Al-Khuwarizmi, Al-Biruni, Avicena, Averroes, Maimonides y tantos otros. Ahora fueron los cristianos los que comenzaron a traducir al latín cuanto caía en sus manos.

De esta manera se extendió en Europa el conocimiento de la filosofía aristotélica, iniciado por las primeras traducciones de Boecio. Las ideas de Aristóteles fueron muy bien recibidas por los místicos medievales, que no encontraron en ellas contradicciones con las verdades «reveladas». Así, Aristóteles se convirtió involuntariamente en el paladín de la ortodoxia medieval que abanderó su filosofía, convenientemente adaptada a las enseñanzas cristianas de la época, para atrincherarse contra el huracán de nuevas ideas que comenzaba a soplar sobre Europa.

La autoridad de Aristóteles durante la Edad Media fue abrumadora. Su lógica y su concepción del universo se unieron a la numerología y teología cristiana para regir los destinos de la razón en una simbiosis tan férrea que ningún escolar ortodoxo, científico o teólogo se atrevieron a desafiar. Incluso intelectos de la estatura de Alberto Magno (1193-1284) y su brillante discípulo Santo Tomás de Aquino (1226-1274) se rindieron a la corriente aristotélica. Así, cuando Santo Tomás escribió que «no hay conflicto entre ciencia y religión» por «ciencia» entendía la elaborada fenomenología aristotélica. De este modo el ejemplo autoritario de estos pensadores determinó la principal corriente de pensamiento europeo sobre el universo físico, y la relación del hombre con aquél durante más de tres siglos.

La experimentación no estuvo totalmente abandonada durante la Edad Media, pero fue una actividad esporádica, y, con pocas excepciones, poco relevante en cantidad y calidad. Contra el torrente de palabras emitidas por cientos de lógicos elocuentes y por locuaces numerólogos, todos ellos resolviendo el universo entero en sus cabezas, la ciencia europea hizo lo que pudo para permanecer estacionaria y evitar un retorno a la edad de piedra. Poco a poco, no obstante, los humanos literalmente recuperaron el sentido, y, utilizando sus manos y sus ojos, descubrieron que todo aquel compendio de razonamientos estériles no era sino un mal sueño que repentinamente se evaporó en el amanecer de la ciencia moderna.

En efecto, tanto los cruzados que sitiaban Jerusalén, como los sabios que traducían en Toledo estaban firmando la condena de muerte del abaquismo en plazo más o menos breve. Unos y otros eran incapaces de ocultar su entusiasmo por los nuevos métodos de cálculo de origen indio que se propagaba rápidamente por toda Europa.

Este movimiento se aceleró a partir del inicio del siglo XIII, gracias a la influencia decisiva del matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido por el nombre de Fibonacci. Viajó por el Africa musulmana y Oriente Próximo donde se empapó del sistema de numeración árabe, asimismo de sus métodos de cálculo, las reglas algebraicas y los principios fundamentales de la geometría. Su libro *Leber Abaci* (*Tratado del Ábaco*) contribuyó decisivamente a la difusión de las cifras «árabes» y al desarrollo del álgebra en Europa occidental, convirtiéndose pronto en un breviario de todos los practicantes del algoritmo. A pesar de su título, el contenido no tenía ya nada en común con los tratados de la escuela del papa Silvestre, puesto que explicaba, en particular, todas las reglas del cálculo escrito según el uso del cero y de las nueve cifras regidas por el principio posicional.

Desde ese momento, la balanza comenzó a inclinarse a favor de los algoristas, lo que constituyó el inicio del movimiento a favor de la democratización del cálculo en Europa.

Sin embargo, la batalla estaba aún lejos de haber sido ganada. Así, la resistencia contra los nuevos métodos de cálculo se organizó en dos frentes muchas veces yuxtapuestos. De un lado muchos calculadores medievales, clérigos en su mayoría por añadidura, encerrados en las rutinas de las numeraciones y las reglas arcaicas, seguían defendiendo la supremacía del ábaco. Estos calculadores profesionales constituían una verdadera casta bajo el amparo de la Iglesia. Sorprendidos y preocupados por mantener su monopolio, rechazaron de plano el nuevo algoritmo revolucionario que ponía la aritmética al alcance de cualquiera.

Por otro lado, la propia Iglesia, que había mantenido un papel rector en la sociedad, no favoreció ciertamente la difusión del nuevo cálculo, que iba a significar para ella la pérdida del monopolio en materia de enseñanza y la consiguiente pérdida de poder e influencia. Asimismo, los rectores de la ortodoxia cristiana medieval exigieron que la evolución de la ciencia y la filosofía, permaneciera sometida a la fe absoluta en sus dogmas, y que el estudio de aquéllas se consagrara a la perfecta armonía con la teología. Por todo este cúmulo de circunstancias, en lugar de liberar al intelecto europeo, ávido de sabiduría, muchos intransigentes teólogos medievales lucharon durante todavía muchos siglos para mantenerlo encadenado, originando muchas tragedias.

De esta manera, pronto corrió el rumor que siendo tan fácil e ingenioso, el nuevo cálculo árabe debía encerrar algo mágico o demoníaco. De ahí a enviar a los *algoristas* demasiado entusiastas a la misma hoguera que las brujas y los herejes no había más que un paso, que algunos inquisidores no dudaron en franquear a veces.

Pero las cifras árabes y el cálculo escrito, como una nueva religión, fueron ganándose un respeto cada vez más extendido entre el pueblo llano, al que no escapaba el papel fundamental que el cero desempeñaba en el nuevo método, cero al que entonces se denominaba cifra, hasta el punto de que la tradición popular llegó a servirse de este término para designar todo el sistema numérico. De esta forma, el nombre de cifra cobró el sentido que hoy tiene en muchas lenguas occidentales.

La disputa entre *abaquistas* (feroces defensores de los números romanos y del cálculo con fichas sobre el ábaco) y *algoristas* (que preconizaban el cálculo escrito de origen indio) duró todavía varios siglos hasta la Revolución Francesa, a partir de la cual se prohibió definitivamente el uso del ábaco en las escuelas y la administración. Fue el punto final de una larga lucha de siglos y significó también la liberación de las trabas que habían impedido el pleno desarrollo del cálculo y la ciencia.

Nombres propios medievales: Bacon y Dante

Algunas pistas de lo que se avecinaba en la Europa medieval con la irrupción de las nuevas corrientes de pensamiento provenientes del sur, se desprenden claramente del trabajo y la vida de Roger Bacon (1214-1294) y Dante Alighieri (1265-1321). Contemporáneos durante casi treinta años, Bacon y Dante fueron una de las parejas más discordantes que puede encontrarse en un mismo siglo a lo largo de la historia. Dante fue la encarnación de la Edad Media y su filosofía natural permaneció viva durante unos doscientos años antes de que fuera enterrada para siempre. Bacon fue la encarnación del estilo de la nueva era de la ciencia moderna, aunque su mensaje permaneció semilatente durante casi trescientos años antes de que tuviera vida plena. Dante adquirió rápidamente una reputación universal; Bacon tuvo que contentarse con el honor vacío de haber sido un hombre que «podría haber sido grande» si hubiera nacido tres siglos más tarde. Sin embargo, sólo unos pocos especialistas en literatura conocen hoy algo de la sustitución mística de la ciencia de Dante y, ciertamente, prácticamente ninguno defiende esas ideas. Sin embargo, millones de hombres viven gracias a que la ciencia matemático-experimental que Bacon intentó aplicar al mundo demasiado pronto, fue finalmente enseñada y aceptada.

La numerología tuvo su poeta en Dante. Inmerso en la política florentina durante gran parte de su juventud y enviado al exilio después, Dante encontró todavía tiempo, no sólo para componer uno de los más grandes poemas, sino también para convertirse en un completo maestro de la filosofía, la teología, la astronomía y las ciencias físicas de su tiempo. Fue asimismo un gran artista y un experto en el misticismo medieval de los números en el que estaba embebido de tal forma, que difícilmente pudo haber evitado expresar su esotérica filosofía sobre el cielo y el infierno en el simbolismo de los números como lo hizo en la Divina Comedia, en donde se entrecruzan poéticamente la teología, el amor humano y el divino y la cosmología medieval.

Los eruditos para los que Dante escribió murieron con la Edad Media. El simbolismo numérico que infundió a su narrativa con gran maestría y talento perdió su significado desde entonces, y hoy sólo nos queda su excelente poesía.

En contraste con el éxito de Dante, la vida frustrada de Roger Bacon es un claro exponente del conflicto del siglo XIII entre el mundo medieval, prácticamente muerto, y el moderno todavía sin acabar de nacer. Así, para unos, la mayoría de los trabajos de Bacon fueron la gota de agua en el desierto medieval y el preludio de los grandes avances del Renacimiento doscientos años después. Los contrarios, presentan a Bacon como un compilador y enciclopedista excesivo, sin capacidad para expresar nuevas ideas en matemática y ciencia.

Ciertamente, parece haber un exceso de celo en las dos partes de la disputa. Los defensores de la Edad Media insisten en que la ciencia medieval, especialmente en su aspecto experimental, ha sido mal interpretada. Los partidarios de la ciencia moderna argumentan que cualesquiera que fueron las virtudes de la Edad Media en ciencia y en otros aspectos, el mundo tuvo ya bastante del pensamiento medieval en el pasado y no quiere más de él ahora o en el futuro. En el centro de esta controversia se encuentra Roger Bacon, indiferente por igual a los prejuicios de admiradores y detractores. Lo cierto es que, aunque no fue Galileo ni Newton, seguramente ambos grandes científicos le habrían bienvenido en su compañía.

Siendo un hombre de su tiempo, Bacon pagó a la numerología medieval el tributo de su sincero respeto: «Las matemáticas», dice Bacon, «son la puerta y la llave de las ciencias y fueron descubiertas por los santos al principio del mundo... y han sido siempre utilizadas por todos los santos y sabios mucho más que todas las ciencias. El rechazo de las matemáticas daña a todo el conocimiento, puesto que el que las desconoce no puede conocer otras ciencias o las cosas de este mundo y lo que es peor, los hombres que son así, ignorantes, son incapaces de percibir su propia ignorancia y no buscan el remedio».

Excepto por la inclusión de los santos -San Agustín y sus sucesores- las palabras de Bacon podrían ser compartidas por cualquier discípulo de Newton. No obstante, su significado para Bacon no era el mismo que para nosotros, lo que es evidente de sus comentarios sobre los números místicos de la astrología. Porque, aunque las matemáticas podían ser la puerta y la llave de las ciencias, la astrología era la ciencia reina por añadidura en la época. Así, la fracción medieval de la mente de Bacon se inclinó ante la astronomía, la otra mitad era libre.

Tras unos años en la universidad de París, donde estudió ciencias e idiomas, incluido el árabe, Bacon regresó a Oxford donde había sido estudiante. Allí pugnó, con relativa fortuna, a reemplazar la lógica por las matemáticas en los estudios universitarios. «Las divinas matemáticas», declaró, plagiando quizás inconscientemente a Platón, «pueden purgar el intelecto y preparar al estudiante para adquirir cualquier conocimiento». La frase de Bacon iba fundamentalmente dirigida a los aristotélicos, entre cuyo marasmo trató de practicar la ciencia. Desafiando a la caterva de lógicos medievales que le rodeaban, predicó claramente la doctrina herética de que la experimentación es el único cimiento fiable para las ciencias naturales. Más concretamente, propugnó el método científico moderno de proceder desde la formulación matemática de principios descubiertos empíricamente, hasta llegar a deducir reglas y fórmulas generales y comparar los resultados con la observación, o con nuevos experimentos.

La ciencia prematura de Bacon nació de su conocimiento de lo que los musulmanes habían hecho, mientras que los europeos se perdían en un mar de dialéctica hasta que los hechos los despertaron abruptamente. Mientras que los cristianos, seguidores de «todos los santos y sabios» discutían sobre los misterios sagrados de los números, los seguidores del infiel profeta Mahoma cultivan la ciencia empírica y las matemáticas. Bacon no pudo decidirse si seguir a los santos o al profeta. Así, dividió su mente y siguió a ambos.

Después de gastar una fortuna en libros, aparatos y manuscritos árabes, Bacon, entrado en los cuarenta años, se encontró arruinado y sin amigos, decidiendo entonces hacerse franciscano. Desde el retiro conventual cultivó su ciencia. La química, la óptica y la busca de la piedra filosofal a través de la alquimia le ayudaron a liberarse del tedio.

Naturalmente, sus hermanos franciscanos le acusaron de comerciar con el demonio. Sus ruidosos y malolientes experimentos con pólvora fueron sin duda parte del motivo de la acusación.

Con objeto de vigilarle mejor, Bacon fue enviado a París. Allí, Guy de Foulkes, a quien Bacon conocía de Inglaterra, le animó a proseguir sus investigaciones. Poco después, cuando de Foulkes llegó a papa (Clemente IV), Bacon consiguió algunos fondos para comprar material de escritura y pedir libros prestados. En quince meses acabó su Opus Maius. Recibida la obra por el papa, pese a que estaba seriamente enfermo (era el año 1267 y falleció en 1268), pudo dar las ordenes oportunas para organizar el regreso de Bacon a Londres. Allí, sin apenas amigos pasó sus últimos años, rodeado de controversia, pasando incluso algunos períodos en prisión, hasta su muerte a la edad de ochenta años.

Aunque su química era prácticamente alquimia y sus «matemáticas divinas» no estaban limpias de numerología, Bacon puede en gran parte considerarse el primer científico moderno. Sus trabajos en óptica sobre las leyes de reflexión y, en menor medida, sobre la refracción, sus intentos de explicar el arco iris, y los experimentos con lentes de aumento, por citar algunos, le elevaron a un mundo lejos del universo de palabras en el que la mayoría de europeos contemporáneos se encontraban. Y esto es cierto, hubiera o no Bacon adquirido sus conocimientos de óptica de los árabes. Otros tuvieron la misma oportunidad y no la aprovecharon.

Los buenos teólogos de la época de Bacon murieron todos antes de que aprendieran la lección elemental que sus sucesores tuvieron que asimilar con gran esfuerzo en el siglo XIX: la deidad además de ser un matemático, es también un científico.

VII

EL AMANECER DE LA CIENCIA MODERNA

El final de la Edad Media se sitúa un siglo y medio después de la muerte de Bacon, aproximadamente en el centro de gravedad de tres eventos que tuvieron lugar en la segunda mitad del siglo XV.

Primeramente, en 1453 los turcos conquistaron Constantinopla. La significación de este suceso no fue que arrasaran y saquearan una ciudad gobernada por los que la habían saqueado y arrasado con anterioridad, sino que destruyeron sus murallas con cañones. La era de la pólvora significó el final de los señores feudales que desafiaban a los reyes detrás de las murallas de sus castillos. La tiranía local de la aristocracia feudal se reemplazó por la tiranía centralista de reyes y emperadores divinos.

En segundo lugar, durante el final del siglo XV y el principio del XVI se vivió una etapa de grandes descubrimientos geográficos. Colón descubrió América en 1492, Vasco de Gama bordeó el Cabo de Buena Esperanza (1499) en su viaje a la India, y Magallanes (1519-1522) dio la vuelta al mundo. Las consecuencias científicas de estos descubrimientos incluyeron la necesidad de mejores relojes, mejor astronomía, mejor trigonometría y, en definitiva, un estímulo global para las ciencias exactas.

Ejemplos representativos de avances en estos campos son los trabajos sobre trigonometría de los astrónomos renacentistas Nicolás Copérnico (1473-1543) y Johannes Kepler (1571-1630), el decisivo descubrimiento de los logaritmos por el escocés John Neper (1550-1617), que tanta influencia tuvo en la obra de Kepler, y las contribuciones en aritmética, álgebra, trigonometría y geometría de François Viète (1540-1603), quien fue el primero en representar el valor del número (por una expresión analítica de una secuencia infinita de operaciones algebraicas.

El tercer y quizás más importante hecho acaeció hacia finales del siglo XV al iniciarse la revolución en la diseminación de la información a través del papel impreso. Aunque esta tecnología se había utilizado desde el siglo IX, sólo se comenzó a experimentar en Europa en el siglo XV, y aunque un invento de este tipo no suele ser responsabilidad de un sólo hombre, tradicionalmente se acredita a Johannes Gutenberg (1397-1468), de Mainz, quien en 1456 imprimió una edición de la Biblia por este método.

Más que ninguna otra cosa, la invención de la imprenta rompió el monopolio de la iglesia en la transmisión del conocimiento. Hasta ese momento los manuscritos se copiaban a mano usualmente por monjes en monasterios. A partir de la aparición de la imprenta los libros llegaron a sectores cada vez más amplios de la población. Como tantos otros libros, los textos de matemáticas podían ahora producirse en masa y no sólo en latín, sino en las lenguas de cada país.

La aparición de la imprenta afectó el trabajo de los matemáticos de una manera más sutil. Al final de la Edad Media, los matemáticos se reunían en competiciones entre ellos, que generalmente involucraban cantidades de dinero considerables, y en las que proponían naturalmente la solución de problemas. Muchas universidades se basaban en el resultado de estas disputas para ofrecer una plaza al ganador. En 1535, por ejemplo, una competición en Venecia entre Antonio Fiore y Niccolo Tartaglia tuvo como premio 30 banquetes que el perdedor debía pagar al ganador y sus amigos. Naturalmente, estos matemáticos competidores ganaban celosamente los secretos de su arte. Por ejemplo, la competición anterior se centraba en la solución de la ecuación de tercer grado. Tartaglia sabía cómo resolverla y confió el secreto al brillante fundador de la teoría de la probabilidad, Giordano Cardano (1501-1576), haciéndole jurar guardar el secreto. Posteriormente, hubo mucha polémica, intriga y desacuerdo cuando Cardano, quien descubrió la solución general de la ecuación cúbica, publicó sus resultados, aunque dando crédito a Tartaglia.

La imprenta cambió radicalmente este escenario y los matemáticos encontraron un camino más seguro para ganar prestigio que la competición directa. El nombre del nuevo juego se llamó «publicar o perecer».

Ciertamente, de la conjunción de los tres eventos anteriores nació el inicio de una nueva era en la cultura europea, en la que un selecto y refinado misticismo de los números se mezcló con civilizadas expresiones de la literatura, la ciencia y el arte. Piezas maestras de la escuela de aprendizaje griega se introdujeron en Italia por escolares refugiados de la invasión turca. Se apercibía el final del largo reinado de Aristóteles. Platón resurgía de nuevo, y con el revivir del platonismo la numerología se volvió progresivamente más metafísica. Sobre la mitad del siglo XVI no quedaba prácticamente ningún estudioso reputado que tomara en serio los absurdos del pitagorismo medieval y los refinamientos escolásticos de las teorías de Aristóteles. El misticismo de los números en mano de los ilustres había retornado a la perfección platónica.

Responsables directos de estos cambios fueron personajes como Nicolás de Cusa (1401-1464), quien siendo hijo de un pescador, llegó a obispo de Brixen en el Tirol y alcanzó el rango de cardenal. Nicolás de Cusa fue también un gran apasionado por las matemáticas que, furioso con los refinamientos excesivos de la lógica aristotélica y la filosofía natural de sus contemporáneos, abanderó las ideas de Bacon, definiendo que el razonamiento puro -tal como lo practicaban los charlatanes medievales- no podía conducir, ni al entendimiento de la naturaleza, ni de la deidad. Esta herejía para la época, no afectó sin embargo a Nicolás, dada su posición en la iglesia, y desde ella insistió que el razonamiento debía complementarse con la observación y el experimento. La afirmación era ciertamente fastidiosa, pero, no obstante, a los que molestaba tuvieron que aguantarla, al menos mientras Nicolás estuviera allí. El razonamiento que debía acompañar la ciencia empírica, no era la lógica aristotélica, sino las matemáticas. Un siglo y medio después Galileo llegó a la misma conclusión.

Dado que la lógica de Aristóteles era impotente para incluir el infinito, Nicolás de Cusa argumentó a favor de una aproximación mística a la perfección de la deidad. Como el hombre es finito y no puede alcanzar el infinito, sólo puede percibir su existencia a través de las matemáticas, « la única verdad de la ciencia». El infinito hacia el cual el hombre progresa proyecta su clara imagen en la secuencia sin fin de los números naturales 1,2,3,..., cada uno de ellos después del primero, generado de su antecesor mediante la adición de la unidad. Aquí se encontraba seguramente el símbolo de la creación de todas las cosas por el autor del universo. Nicolás, había dado un paso por delante de Pitágoras: los números no eran las cosas que simbolizaba su creación a partir del uno, sino simplemente una imagen de la realidad conocida sólo por la deidad, comprensible por una mente finita. De este razonamiento se deduce que el hombre conoce sólo apariencias, nunca la realidad. Sin embargo, los seres humanos no están condenados a la ignorancia eterna; al menos pueden visionar un halo de la realidad a través de ese simbolismo puro que son las matemáticas.

Era natural que Nicolás de Cusa evolucionara desde sus conclusiones místicas hacia la necesidad imperiosa de aplicar las matemáticas al entendimiento de la naturaleza. No obstante, las matemáticas de su tiempo eran inadecuadas para una tarea tan formidable. Cuando Newton desarrolló las matemáticas necesarias en el siglo XVII, utilizó directamente el concepto de infinito matemático y ninguno de los infinitos teológicos propugnados por Nicolás de Cusa.

Desgraciadamente, los guardianes de la ortodoxia medieval se resistieron duramente a aceptar los nuevos aires que soplaban cada vez con más fuerza y en todas direcciones. La transición de la Edad Media al Renacimiento en el mundo científico-matemático fue larga y penosa, y tuvo sus víctimas en manos de los intolerantes que se resistieron a cualquier desviación de los textos de la Biblia, o de las distorsionadas enseñanzas de su ídolo Aristóteles. Tan lejos del fin oficial de la Edad Media, como en 1600, Giordano Bruno fue quemado vivo en Roma por mantener que la Tierra se mueve con respecto al sol, y en 1633, a la edad de 70 años, Galileo Galilei tuvo que apostatar de sus ideas científicas delante de la inquisición.

Giordano Bruno (1548-1600) fue un ferviente admirador de Nicolás de Cusa, a quien llamó el «divino Cusano». Desdichadamente, y para su desgracia, su rechazo a la cultura aristotélica oficialista medieval fue todavía más explícito que el de su maestro en un periodo en el que la Iglesia acentuó su autodefensa frente a los inevitables avances del pensamiento renacentista. Para mayor evidencia, Bruno abrazó la astronomía de Copérnico con el mismo entusiasmo con que caricaturizó muchos de los credos medievales. Su propia alternativa, para lo que denominó sordamente las «desilusiones de sus ilustrados contemporáneos», fue un panteísmo poético. En él combinó las enseñanzas del divino Cusano, fragmentos del neo-platonismo, la esencia del pitagorismo, la astronomía de Copérnico y trozos de los estoicos y los epícuros, con especulaciones crónicas propias. Todo ello lo compactó en una herejía colosal que contradijo, en general y en lo particular, a todas las creencias sagradas de la teología medieval.

Educado como un fraile dominico, una vez que le asaltó el escepticismo trató de buscar refugio entre los calvinistas de Génova. Estos, no obstante, todavía creían en mucho de lo que Bruno consideraba superstición y le invitaron a marcharse. Huyó entonces a París, para aterrizar en el reducto aristotélico más antiguo de Europa. Obviamente, un libre pensador como Bruno pronto se encontró allí fuera de lugar y decidió cruzar el Canal de la Mancha hasta Oxford. Allí, arropado por una atmósfera académica ecléctica, pudo enseñar libremente la astronomía de Copérnico y todas sus pseudoherejías personales. Pero siendo un hombre inquieto, no se resignó a una vida apacible y regresó al continente.

Para entonces ya era famoso. Moviéndose constantemente por todos los centros del saber más prestigiosos llegó finalmente a Venecia, donde lo recogieron durante un tiempo mientras Roma, con calculada paciencia, buscaba como atraparlo. Finalmente, cayó en manos de la inquisición. Durante siete años le dieron la oportunidad de retractarse y arrepentirse. Ambas invitaciones fueron sistemáticamente rechazadas por Bruno. Agotada su paciencia, los guardianes de la ortodoxia decidieron que era el momento de retrasar el reloj mil años. Para beneficio de su alma inmortal y su memoria eterna, Bruno fue quemado en la hoguera el 16 de febrero de 1600. Sus últimas palabras en defensa de la teoría copernicana sobre el movimiento de la tierra alrededor del sol, actuaron como un auténtico maleficio contra el mundo representado por los que habían encendido la antorcha.

El fuego se extendió rápidamente en un incendio fuera de control que consumió los últimos residuos podridos de la Edad Media e iluminó la oscuridad, anticipando el amanecer de la ciencia moderna. Con esa luz inesperada, los sabios pirómanos responsables de la hoguera se transfiguraron en grotescas caricaturas de ellos mismos. Su noche estaba acabada, y, aunque todavía podían infundir temor a algunos, perdieron el respecto de todos.

Para conmemorar esta decisiva ruptura entre el viejo mundo y el nuevo, en 1889 los admiradores de Bruno erigieron su estatua como homenaje en el sitio donde fue quemado. Esta justa iniciativa tuvo, no obstante, una oposición considerable. Obviamente, se necesita una mente tolerante para olvidar errores pasados.

Tras Bruno, Galileo (1564-1642). El fracaso de Bruno de convertir sus perseguidores a la astronomía de Copérnico tuvo su contrapartida en la conversión total de Galileo, quien absorbió la gran herejía a través de los escritos de Bruno.

La vida de Galileo es tan conocida que no vale la pena repetirla aquí. Aunque fue un ferviente defensor de sus ideas, no llegó a los niveles de fanatismo de Bruno para hacer valer sus argumentos. Tuvo además la gran ventaja de ser un devoto creyente de las ideas religiosas de la época. Así, mientras que Bruno invitaba a la persecución, Galileo la fue evitando de forma sutil. Desgraciadamente, los guardianes de la esencia, hartos de verse burlados en tantas ocasiones, estrecharon cada vez más el cerco.

Así, en 1616, Galileo recibió un primer aviso de moderar su entusiasmo por la nueva astronomía. Lo aceptó más o menos. Pero siendo un hombre extremadamente serio sobre sus principios, en 1632 defendió en su *Gran Diálogo* el sistema copernicano frente el tolemaico, aceptado por los eclesiásticos aristotélicos como la verdadera astronomía. Numerosas afirmaciones explícitas en las sagradas escrituras estaban en desacuerdo con las teorías de Copérnico y, por consiguiente, también con las de Galileo.

Este juego de ratón y gato acabó, y Galileo fue finalmente llevado frente a la inquisición. Tras un tristemente memorable juicio, el 22 de junio de 1633, a la edad de 70 años, el astrónomo hereje fue condenado a retractarse de las teorías de Copérnico y de todas sus enseñanzas personales. Así, casi sin fuerzas, tuvo que firmar la patética declaración siguiente:

> «Yo, Galileo Galilei, de 70 años de edad, traído en persona a juicio, y arrodillado frente a los más eminentes y reverendos señores cardenales, inquisidores generales responsables de la defensa de la fe cristiana frente a sus depravados ataques, juro que en el futuro creeré cada artículo que la sagrada iglesia católica y apostólica de

Roma proclama, enseña y predica. Yo creía y sostenía que el Sol es el centro del universo y es inmovible, y que la Tierra no es el centro y es movible. Queriendo, por consiguiente, eliminar de las mentes de sus eminencias, y de todos los cristianos católicos, esta vehemente sospecha de herejía, de la que con motivo se me acusa, abjuro, abomino y detesto esos errores y herejías y juro que nunca más en el futuro diré o afirmaré nada verbalmente, o por escrito, que pueda dar lugar a sospechas similares». Pero, si esto ocurriera y yo violara cualquiera de estas promesas y juramentos (¡lo que Dios no permita!), me someteré a las penas y castigos decretados contra delincuentes de este tipo».

Tras el juicio, Galileo fue sentenciado a prisión en Roma. La sentencia fue posteriormente conmutada y Galileo murió ciego y agotado en 1642. Su muerte, no obstante, no relajó totalmente a los piadosos inquisidores. Destruyeron muchos de sus manuscritos, se opusieron a que fuese enterrado cristianamente y rechazaron erigirle un monumento con la ilusa esperanza de que su brillante pensamiento y su trabajo fuese olvidado.

La contribución de Galileo en la inauguración de la ciencia moderna se minimiza en ocasiones por los historiadores de la ciencia, pero nunca por científicos en activo que saben algo de la historia de la ciencia. Es cierto que otros habían hablado con anterioridad de combinar las matemáticas con la observación y el experimento. Tampoco fue Galileo el primero en insistir que los principios de las ciencias naturales debían obtenerse empíricamente, expresarse en forma matemática siempre que fuera posible, y constituir así la base de un sistema deductivo cuyas conclusiones pudieran comprobarse empíricamente. Pero sí fue quien lo dijo más claramente y más explícitamente que otros y, lo que es más importante, fue el primero en complementar la elocuencia con la acción, a una escala tal, que demostró a todos, excepto a los voluntariamente ciegos, que el método que defendía y practicaba era cierto.

Galileo, juntamente con Arquímedes, son considerados por muchos como los más genuinos precursores de las teorías sobre cálculo infinitesimal que se formalizaron pocos años después por Newton y Leibnitz. Así, en 1638 Galileo observó que hay tantos cuadrados

1,4,26,25,..., como números enteros positivos. Esto es evidente de la secuencia

$$1,2,3,4,5,6,....n$$
$$1,4,9,16,25,36, ...n^2$$

A partir de estas observaciones Galileo reconoció claramente la distinción fundamental entre clases o colecciones finitas e infinitas.

Una colección infinita para Galileo es aquélla en que hay una correspondencia entre toda la colección y cualquier parte de ella. En otras palabras, hay tantas cosas en una parte de una colección infinita como en toda la colección. Esto no ocurre así en colecciones finitas.

La percepción de Galileo de las propiedades cardinales de todas las clases infinitas, ha sido también la base de las teorías sobre la aritmética de números infinitos desarrolladas durante el siglo XIX.

El más insigne contemporáneo de Galileo fue quizás René Descartes (1596-1640) quien latinizó su nombre a Renatus Cartesius, lo que explica por qué la geometría analítica se denomina a veces cartesiana. Descartes, considerado por muchos el primer filósofo moderno, fue también un gran matemático y físico. Aceptó plenamente el sistema copernicano, pero temeroso por la condena de Galileo, publicó la mayor parte de sus trabajos científicos en forma obscura y ambigua y muchos no fueron publicados hasta su muerte.

Tanto Descartes como Galileo fueron defensores en sus matemáticas del ideario de Platón. No obstante, si bien el genio de Descartes fue fundamentalmente abstracto y, consecuentemente, no sintió grandes necesidades de salir del realismo platónico, Galileo no permaneció en actitud de adoración eterna y puso manos a la obra.

El esfuerzo de Galileo no fue en vano. Poco antes de acabar el año en que murió vilipendiado, en Lincolnshire nació un niño destinado a recoger y extender su legado hasta cotas tan altas, que el nombre de ambos permanecerá como referencia obligada en la historia del progreso de la humanidad.

VIII

LAS MATEMÁTICAS LO SON TODO

Está generalmente aceptado que las matemáticas modernas se originaron a través de los siguientes cinco avances significativos que tuvieron lugar durante el siglo XVII: la geometría analítica de Fermat y Descartes; el cálculo diferencial e integral de Newton y Leibnitz, denominado comúnmente cálculo infinitesimal; el análisis combinatorio, particularmente la teoría matemática de la probabilidad de Fermat y Pascal; la dinámica de Galileo y Newton y la ley de gravitación universal de Newton.

La más prolífica de todas estas novedades y la que sin duda ha significado mayores avances en la ciencia y la tecnología de nuestros días fue el cálculo infinitesimal. Durante más de veinte siglos, la geometría y la astronomía había dominado la tradición matemática a través del trabajo de los maestros clásicos. Después de Newton y Leibnitz se dispuso al fin del método de solución universal para todos los problemas intratables de la geometría y la astronomía clásica. Dificultades matemáticas insuperables para Arquímedes podían ya ser resueltas por individuos que posiblemente no le llegaban a la suela de sus zapatos. Leibnitz no exageraba cuando en 1691 exclamó que «mi nuevo cálculo (y el de Newton) proporciona la verdad mediante una metodología de análisis y sin ningún esfuerzo de la imaginación -que frecuentemente sólo tiene éxito por accidente- y nos otorga todas las ventajas sobre Arquímedes que Viète y Descartes nos han dado sobre Apolonio».

El cálculo infinitesimal de Newton y Leibnitz proporcionó por fin el método largo tiempo buscado para investigar la continuidad de funciones en todas sus manifestaciones, bien sea en ciencia o en matemáticas puras, así como para plantear correctamente ecuaciones diferenciales y evaluar exactamente derivadas e integrales. Todo cambio continuo, en dinámica, en el flujo de calor, en el de un fluido o en electricidad, por poner algunos ejemplos, es expresable en forma matemática hoy en día gracias al cálculo infinitesimal del siglo XVII y sus desarrollos posteriores. Consecuentemente, las ecuaciones de la mecánica de sólidos, de la dinámica de fluidos, del electromagnetismo, de la transmisión del calor, y otras muchas ecuaciones que utilizamos para expresar el comportamiento de los fenómenos de la naturaleza, son el resultado palpable de las teorías sobre cálculo infinitesimal de Newton y Leibnitz. Con la generalización de las mismas para describir en forma de ecuaciones diferenciales o integrales cualquier problema físico, los discípulos de Newton y Leibnitz pudieron afirmar con total convicción que las «matemáticas lo son todo», en el sentido de que cualquier problema pudo, desde esa época, ser planteado matemáticamente utilizando las herramientas del nuevo cálculo.

La expresión matemática de los problemas de la naturaleza en forma de ecuaciones diferenciales o integrales sólo es una etapa más en la comprensión del comportamiento del universo. El estudio detallado de cada problema requiere la solución de dichas ecuaciones para ese caso concreto. Desgraciadamente, dicha solución, en forma de una expresión o fórmula universal, no es posible hoy en día en la mayoría de los problemas prácticos. Sí lo es, no obstante, en forma *numérica*. Es decir, con la ayuda de los denominados *métodos numéricos* es posible resolver un problema de la física específico partiendo de su planteamiento matemático en forma de ecuaciones diferenciales o integrales, según las técnicas propuestas por Newton y Leibnitz, y proceder luego a su solución numérica. El resultado final de este proceso de cálculo son los valores , es decir, los números, que toman todas las incógnitas del problema analizado.

Las implicaciones del proceso anterior son extraordinarias. Significa esencialmente el retorno de los números para ayudarnos a entender el comportamiento del universo. Pero, no avancemos quizás tan deprisa y detengámonos, aunque sea brevemente, en ese periodo glorioso que permitió que las matemáticas pasaran a ser las protagonistas inapelables de una nueva época en el progreso científico y técnico del hombre.

Newton, Leibnitz y el cálculo

Isaac Newton (1642-1727) nació premonitoriamente en el año de la muerte de Galileo, en Lincolnshire, un pequeño pueblo de Inglaterra, donde pasó su infancia. Siendo el hijo póstumo de un granjero, su madre quiso que Newton se hiciera cargo de la granja.

Afortunadamente, su tutor en el colegio se apercibió del talento del joven alumno y logró que en 1661 fuera enviado a Cambridge, a la edad de diecinueve años, donde fue introducido a las geometrías de Euclides y Descartes, y al tratado de aritmética de Wallis. Durante los años 1665 y 1666, Newton interrumpió sus estudios en Cambridge debido a la gran plaga que azotó Inglaterra y regresó a la granja. Durante ese providencial periodo, a la edad de veintitrés años, Newton imaginó las ideas fundamentales del cálculo infinitesimal y la ley de la gravitación universal. En 1667 regresó a Cambridge, donde en 1669 sucedió a Barrow en la cátedra de matemáticas. En 1672, a la edad de treinta años, Newton fue elegido miembro de la Royal Society inglesa de la que fue presidente desde 1703 hasta su muerte. En los últimos años de su vida dedicó gran parte de su esfuerzo a diversas actividades no científicas, de índole político y administrativo, destacando en todas ellas por su talento y la rapidez con la que resolvía cualquier problema que se le presentara.

Newton es considerado por muchos el paradigma del científico de todos los tiempos. En una época como la actual, caracterizada por la cantidad de información de la que disponemos para poder extraer conclusiones sobre las que basar nuevas teorías, es sorprendente cómo apoyándose en los dispersos conocimientos matemáticos de la época, tales como la geometría y el álgebra de Euclides y Descartes, la mecánica de Galileo y las leyes de movimiento de astros de Kepler, entre otros, Newton estableció los principios del cálculo diferencial e integral y formuló tres leyes que gobiernan el movimiento del universo, desde las galaxias en el cielo a los electrones que giran alrededor de núcleos en un átomo, desde el gato que siempre cae de pie, hasta las antenas giratorias que vigilan el vuelo de naves espaciales.

Las leyes del movimiento de Newton han superado la prueba del tiempo durante los últimos trescientos años. Así, los mismos conceptos de espacio, tiempo y masa se han trastocado bajo el impacto de la teoría de la relatividad de Einstein; los viejos prejuicios sobre causa, efecto y certeza fueron superados por la mecánica cuántica, pero las leyes de Newton han permanecido prácticamente inmutables.

Esto es cierto. Contrariamente a la opinión generalizada, las leyes de Newton no contradicen la teoría de la relatividad de Einstein. La segunda ley de Newton no dice exactamente que la fuerza es igual a la masa por la aceleración. Newton precisamente postuló que

$$F=d(mv)/dt$$

Siendo un hombre cauto como era, Newton tuvo gran cuidado de no sacar la masa fuera del paréntesis. Así, cuando la masa es función de la velocidad, como sucede en la teoría de Einstein, la ley de Newton escrita en la forma anterior sigue siendo válida. Es, por tanto, incorrecto considerar la mecánica relativista como contradictoria con las leyes de Newton. Quizás es más justo considerar aquélla como una extensión de éstas para acomodar los fenómenos electromagnéticos.

La resistencia de Newton a publicar su obra refleja ciertos aspectos de su carácter. Aunque no fue un hombre tímido, Newton sentía un gran disgusto por cualquier asunto que bordease la controversia. De hecho, su obra maestra, los *Principios*, vio la luz gracias a la persistente labor de su amigo el gran astrónomo Edmond Halley (1656-1742), quien le animó a escribir los tres volúmenes de este trabajo definitivo, financiando incluso su publicación en 1687.

La concepción de Newton de la deidad expresada en los *Principios* es de cierto interés matemático por su insistencia en repetir que el infinito es uno de los atributos característicos del Ser Supremo. La deidad, según Newton, «es suprema y totalmente perfecta. Es eterna e infinita, omnipotente y omnisciente; es decir, su duración abarca desde la eternidad a la eternidad, su presencia de infinidad a infinidad. No es eternidad e infinidad, sino eterna e infinita; no es duración o espacio, sino que perdura y está presente. Dura para siempre y se manifiesta en todas partes; y por existir siempre y en todas partes, constituye la duración y el espacio».

Hubiera sido muy interesante conocer la opinión del tribunal de la inquisición que juzgó a Galileo, sobre estas ideas de Newton. Quizás algunos de sus miembros las leyeron en el otro mundo, aunque desde allí poco pudieron hacer para suprimirlas o silenciar a su autor. Merced a Enrique VIII y sus numerosas esposas, la inquisición no tuvo agentes activos en Inglaterra y por lo tanto Newton pudo expresar sus credos libremente.

Aunque hay un aura de misticismo matemático en la concepción que Newton tenía de la deidad, no se encuentran rastros de numerología en su teoría o su ciencia. Temporalmente, Newton fue un moderno Tales en posesión de un gran sentido común. Siendo uno de los grandes filósofos naturales, Newton no dejó que en ningún momento la metafísica pusiera freno a sus teorías y sus descubrimientos. Así, sus conceptos de espacio absoluto, tiempo absoluto y movimiento absoluto podían quizás haber deleitado a Platón, quien seguramente los hubiera desmenuzado. Para Newton, no obstante, la clarificación de estos absolutos oscuros era irrelevante y, como las propias matemáticas, estaban subordinados al objetivo práctico. Este característico pragmatismo británico le permitió seguir siempre adelante, incluso cuando planteó la propia naturaleza de la deidad. Consecuentemente, el misticismo de los números fue aparcado temporalmente del pensamiento científico tras la publicación de los *Principios*.

Newton fue casi único en su triple supremacía como matemático puro, como aplicador de las matemáticas a la solución de problemas prácticos y como experimentalista. De los otros dos grandes hombres comúnmente incluidos en esta categoría, Arquímedes es generalmente considerado su igual, y Gauss superior en matemáticas puras, pero inferior en los otros aspectos.

Los primeros rasgos del cálculo infinitesimal de Newton hacia 1665 fueron abstracciones de ideas intuitivas sobre el movimiento. Imaginó una curva como la traza del movimiento de un punto. El camino «infinitamente pequeño» trazado por el punto en un tiempo «infinitamente corto» lo denominó el «momento» y este momento dividido por el tiempo infinitamente pequeño era la «fluxión». Si la «cantidad fluyente» es x, su fluxión se expresa como $\dot{x}$. En nuestra terminología, si x es la función $f(t)$ del tiempo t, $\dot{x} = dx/dt$, es la velocidad en el tiempo t. Similarmente, la fluxión de $\dot{x}$ es $\ddot{x}$, lo que denominamos d^2x/dt^2; $\dddot{x}$ es dx^3/dt^3, y así sucesivamente.

Newton consideró nuestro dx/dt la relación de dos «cantidades infinitamente pequeñas» en sus primeras aproximaciones del cálculo infinitesimal. Por entonces no disponía de un procedimiento riguroso para obtener un límite. De hecho, la teoría de límites no se formalizó hasta casi doscientos años después por Lagrange (1763-1813) y Cauchy (1789-1857). Pese a ello, Newton introdujo el concepto intuitivo de límite y continuidad, y en los *Principios* declara que «cantidades y relaciones de cantidades que en un tiempo finito tienden de forma continua a la igualdad, y antes del final de ese intervalo de tiempo se aproximan entre sí más que cualquier diferencia dada, son finalmente iguales».

•

El competidor de Newton en el cálculo infinitesimal fue un hombre de gustos y carácter muy diferentes. El alemán Gottfried Wilhem Leibnitz (1646-1716) provenía de una familia acomodada y tuvo todas las ventajas (y desventajas) de crecer con el estudio de los clásicos en griego y latín. A diferencia de Newton, fue remarcablemente precoz y a edad muy temprana dominaba idiomas, teología, filosofía, matemáticas y derecho, lo que le convirtió en una eminencia en todos los campos del conocimiento.

Leibnitz es uno de los raros caracteres en la historia del que puede decirse sin exageración que tuvo una mente universal. Sus talentos eran puramente intelectuales. No tenía prácticamente ninguna habilidad artística, ni gusto por el trabajo manual, lo que le ocasionó algunos perjuicios en su labor científica. Pensaba constantemente, y su curiosidad incansable era atraída por todos los problemas que le rodeaban.

Como recompensa por un ensayo revolucionario sobre la enseñanza del derecho, Leibnitz, a la edad de veintiún años, fue nombrado agente general y consejero legal de las autoridades de Mainz. La mayor parte de su tiempo hasta 1673 lo pasó viajando por Europa en misiones diplomáticas. Después de esa época, Leibnitz pasó a ser bibliotecario, historiador y portavoz de la familia Brunswick de Hannover.

Durante sus visitas a Francia e Inglaterra en misiones políticas y diplomáticas, Leibnitz conoció a los principales hombres de ciencia de estos países con los que intercambió sus ideas. Dicho intercambio fue muy importante en el desarrollo del cálculo infinitesimal.

En la primavera de 1673, Leibnitz había preparado el terreno cuidadosamente para presentarse a los sesudos miembros de la Academia francesa y la Royal Society inglesa y para ello desarrolló una máquina de calcular, verdadera predecesora, junto con la desarrollada pocos años antes por el matemático y filósofo francés Blaise Pascal (1623-1666), de las diversas calculadoras mecánicas que se desarrollaron en Europa durante los siglos XVIII y XIX, y que desembocaron en los ordenadores de este siglo.

Leibnitz exhibió su máquina de calcular primero en París y luego en Londres. Con ello esperaba ganar aceptación rápida en el mundo científico y materializar así su ambición de jugar un papel preponderante en el desarrollo de las matemáticas y la filosofía. En aquel momento, Leibnitz no era consciente de su ignorancia de lo que se conocía como matemática moderna y, en consecuencia, sobrestimó las posibilidades que se le presentaban, lo que le provocó varias situaciones incómodas y disgustos. En esa época fue revelador para Leibnitz su encuentro con el gran físico y matemático holandés Christian Huygens (1629-1695). Los dos se hicieron grandes amigos, y así, Leibnitz, bajo la inspiración y tutela de Huygens, pudo adentrarse de lleno en el estudio de las matemáticas más avanzadas y superar sus deficiencias.

Las contribuciones de Leibnitz en matemática y filosofía fueron innumerables. Ciñéndonos al campo del cálculo infinitesimal, Leibnitz desarrolló la mayor parte de sus ideas a partir de los conceptos de «diferencias» y «diferencia de diferencias». Así, para encontrar el «diferencial» del producto xy substrajo xy de $(x+dx)\,(y+dy)$, donde dx y dy son dos cantidades pequeñas, en comparación con x e y. Tras despreciar el término $dxdy$, por la mera razón de ser «obviamente» mucho más pequeño que xdx e ydy, llegó al resultado correcto $d(xy)=xdy+ydx$.

Leibnitz introdujo la notación que utilizamos hoy en día para cálculo de derivadas y el signo integral $\int$, una «s» alargada como significado de la palabra *summa*. Pese a numerosos mal entendimientos y discrepancias con la escuela científica británica, hoy en día está universalmente aceptado que las aportaciones esenciales de Lebnitz al desarrollo del cálculo infinitesimal fueron originales e independientes de los trabajos de Newton sobre el mismo tema unos pocos años antes.

Leibnitz hizo importantes contribuciones en metafísica y en lógica, además de en matemáticas. Todas sus actividades estuvieron sistemáticamente interrelacionadas y sus aportaciones en un campo no pueden apreciarse completamente sin tener en cuenta sus otras actividades Separar sus diversas producciones es mutilar sus pensamientos. Las matemáticas fueron para Leibnitz una parte vital y fascinante de la mente humana. Desde sus días de estudiante acarició la idea de una metodología universal íntimamente asociada con un lenguaje y un simbolismo, a través del cual pudiera ensamblarse todo el conocimiento y relacionarse, a través del análisis, con ciertos elementos lógicos primitivos. De esta aspiración platónica surgió lo que denominó cálculo infinitesimal. Es, precisamente, en relación con este propósito íntimo que debemos valorar sus logros, más que en términos de su contribución al avance inmediato de las matemáticas del siglo XVII.

Es importante mencionar que, como en tantos otros casos en la historia de la ciencia, el cálculo infinitesimal de Newton y Leibnitz no fue un descubrimiento aislado del contexto histórico y cultural de la época. Hemos visto que desde los tiempos de Pitágoras la percepción de lo infinitamente grande o pequeño ha sido un tema de constante preocupación para matemáticos y filósofos. Así, de entre los muchos pensadores que contribuyeron con sus ideas a allanar el camino de Newton y Leibnitz en el descubrimiento del cálculo infinitesimal, destacan entre otros las técnicas de cálculo de áreas y volúmenes de Arquímedes, el tratado de series geométricas de Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667), el método de «indivisibles» del discípulo de Galileo, B. Cavalieri (1598-1647), las ideas sobre espacio, tiempo, movimiento y divisibilidad de Isaac Barrow (1630-1677), los avances en geometría diferencial de James Gregory (1638-1675) y la aritmética de series infinitas del inglés John Wallis (1616-1703). Muchos de estos científicos fueron precisamente contemporáneos de los dos protagonistas de este capítulo.

Pese a lo anterior, y conociendo lo que hoy sabemos del cálculo infinitesimal y sus implicaciones en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, podemos mirar hacia atrás y contemplar muchos descubrimientos aislados, anteriores al genio de Newton y Leibnitz, y percibir en ellos lo que *ahora* reconocemos como pasos *hacia* la formalización del cálculo infinitesimal. Pero esos descubridores, a veces para nuestra sorpresa, no advirtieron lo que ahora percibimos tan claramente. La mayoría fracasó en el momento de dar esa zancada de gigante que hoy nos parece un pequeño paso. Culpar a otros por lo que no hicieron es tanto o más injusto como el falso romanticismo de darles crédito por lo que pudieron haber hecho. El hecho incuestionable es que tanto Newton como Leibnitz dieron ese paso, anticipándose a todos sus contemporáneos en lo que significó un antes y un después en el avance de la matemática aplicada, la ingeniería y la ciencia en general.

IX

LOS NÚMEROS LO ILUMINAN TODO

El profundo significado que representaron los nuevos métodos de cálculo diferencial e integral propuestos por Newton y Leibnitz son comparables a los que el descubrimiento del fuego tuvo para los hombres primitivos, o el de la electricidad para la revolución industrial.

Esta afirmación no es en absoluto exagerada. Antes de Newton y Leibnitz no existía una metodología general para plantear en forma de ecuaciones matemáticas un problema concreto de la física, tal como, por ejemplo, la propagación del calor en un cuerpo, el flujo de un fluido o el equilibrio de un sólido elástico. Obviamente, al no poder plantearse el problema, su solución era imposible. Después de las aportaciones de Newton y Leibnitz, no sólo fue ya posible describir el comportamiento de cualquier sistema físico, fuera éste un sólido, un líquido o un gas, mediante ecuaciones diferenciales e integrales, sino que se dispuso de técnicas para resolver aquéllas en muchos casos que, aunque usualmente eran simplificaciones del problema más general, permitieron avances significativos en el conocimiento científico y técnico. Así, mientras las matemáticas como ciencia autónoma exploraban nuevos campos de abstracción creciente, su aplicación a las demás ciencias se tornó cada vez más indispensable y eficaz. Esta aplicación se extendió, durante el siglo XVIII y el principio del XIX, de la mecánica y la astronomía a las restantes ramas de la física; más tarde a toda la ciencia natural y, en este siglo, a todos los sectores del saber.

No es por tanto sorprendente que la mayoría de los grandes científicos de los últimos trescientos años combinaran una actividad tan ferviente en matemáticas como en otras disciplinas comúnmente denominadas «aplicadas», tales como, por ejemplo, la física (particularmente la mecánica), la biología o, en muchas ocasiones, la ingeniería. Así, las contribuciones de grandes personajes, como Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Navier (1785-1836), Gauss (1777-1855), Stokes (1819-1903), por escoger algunos nombres representativos, son citados con casi igual frecuencia, en las aulas de estudios de matemáticas, que en las de ingeniería o física.

Antes de seguir adelante, expliquemos el significado del avance que supuso el cálculo diferencial e integral, con un ejemplo sencillo, que puede entenderse por cualquiera con mínimos conocimientos de matemáticas. Supongamos que se quiere expresar la ecuación que rige la transmisión del calor a lo largo de una barra de longitud L y sección transversal circular uniforme de área A, cuando está sometida a una fuente externa de calor de Q calorías por unidad de longitud de la barra (Figura 3). El calor que se propaga a lo largo de la barra se caracteriza por una variable q, que indica las calorías que fluyen por unidad de longitud de la barra en cada instante. La ecuación (diferencial) de transmisión del calor en la barra se obtiene como sigue.

Tomemos un segmento de la barra arbitrario muy pequeño (infinitesimal) de longitud dx. Escribamos ahora el balance de flujo de calor que entra y sale por los extremos de dicho segmento de barra. Para ello llamamos qA el calor que entra por el extremo izquierdo del segmento y $(q+dq)A$ el que sale por el extremo derecho, siendo dq un pequeño incremento del flujo de calor q. La diferencia entre el calor que sale y el que entra por ambos extremos de la barra tiene que igualar la aportación externa de calor sobre el segmento y que es igual a $QAdx$. La ecuación resultante es, por tanto

$$(q+dq)A - qA = QA\, dx$$

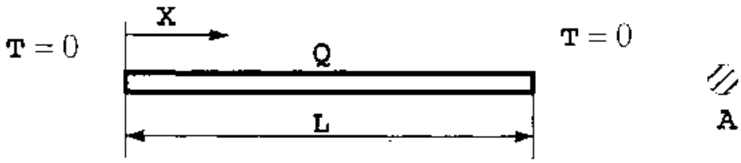
y tras simplificar

$$dq=Qdx$$

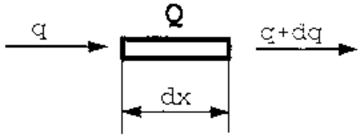
Dividiendo ahora ambos miembros de la igualdad anterior por dx, se tiene

$$dq/dx = Q$$

El cociente dq/dx para valores pequeños de dq y dx tiende a lo que se denomina derivada de q con respecto a x. La ecuación diferencial anterior expresa, por tanto, que la derivada del flujo de calor sobre la barra con respecto a la coordenada x, es igual a la fuente de calor externa. Dado que el segmento infinitesimal que se ha escogido para establecer el balance de flujos es arbitrario, la ecuación diferencial obtenida es válida para todos los puntos de la barra.



Balance de flujos



$$dq = Q\,dx \Longrightarrow \frac{dq}{dx} = Q$$

Ley de Fourier: $q = -k\,\dfrac{dT}{dx}$

Ecuacíon diferencial
de transferencia de calor: $\dfrac{d}{dx}\left(-k\,\dfrac{dT}{dx}\right) + Q = 0$

Solución analítica

$$T = \frac{Q}{2k}(L-X)X$$

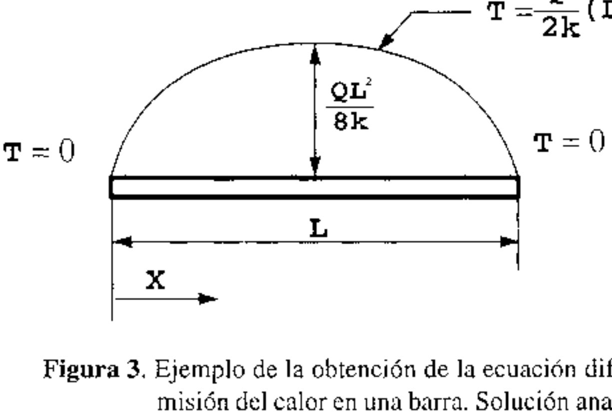


Figura 3. Ejemplo de la obtención de la ecuación diferencial de transmisión del calor en una barra. Solución analítica para T=0 en los extremos.

El siguiente paso es reemplazar el flujo de calor q por otra variable que nos resulte más cómoda, bien desde el punto de vista de ser más fácil de medir, o simplemente por ser su uso más popular. Dicha variable es, en este caso, la temperatura. La relación entre flujo de calor y temperatura tiene una componente empírica. Así, Fourier (1758-1830) observó que el calor fluía de los puntos más calientes a los fríos y que el valor de dicho flujo era proporcional al gradiente de temperatura entre dichos puntos. Recordando que el gradiente de una función es su variación por unidad de longitud, la denominada ley de Fourier se escribe para el problema de la barra como

$$q = -k \; dT/dx$$

donde T es la temperatura y k el coeficiente de conductividad térmica, que es una característica del material de que está constituida la barra. El signo menos en la ecuación anterior indica que la dirección del flujo de calor es opuesta a la del gradiente de temperatura, lo que es la forma matemática de expresar que el calor fluye del punto más caliente al frío.

Sustituyendo esta ecuación en la de balance de flujos de calor, deducida más arriba, se obtiene la forma final de la ecuación diferencial que gobierna la variación de temperatura sobre la barra como

$$d/dx\,(k\;dT/dx) + Q = 0$$

Obviamente, si la conductividad térmica es constante, su derivada es nula y la ecuación anterior se simplifica a

$$k\,d^2T/dx^2 + Q = 0$$

La expresión matemática anterior recibe también el nombre de ecuación de Laplace, y es un caso particular de la ecuación en derivadas parciales obtenida por el insigne matemático y científico francés P.S. Laplace (1749-1827). Esta ecuación es muy utilizada en cursos de matemáticas, donde se estudia su solución y sus propiedades en un sentido generalmente abstracto. La obtención aquí presentada es la que se haría en un curso básico de física o ingeniería. Si bien el resultado de ambos ejercicios es el mismo, el conocimiento del significado de cada término y, lo que es más importante, la comprensión de que dicha ecuación representa el balance de flujo de calor en todos los puntos de la barra, es de suma importancia para interpretar correctamente los resultados de su solución y poder así extraer conclusiones prácticas.

Pasemos finalmente *a resolver* la ecuación diferencial de la variación de temperatura sobre la barra. Antes de ello es necesario expresar las «condiciones en los contornos». Estas condiciones expresan las restricciones que se imponen a la temperatura o el flujo de calor en cada uno de los extremos de la barra. Desde el punto de vista físico puede entenderse que dado que el flujo de calor viene producido por un gradiente térmico, es necesario conocer como mínimo el valor de la temperatura en uno de los extremos, mientras que en el otro el valor conocido puede ser, o bien la propia temperatura, o el calor que entra o sale por dicho extremo. Supongamos para mayor sencillez que las condiciones de contorno son en este caso el valor de la temperatura igual a cero grados en ambos extremos de la barra. El problema a resolver se escribe, por tanto, en forma matemática como

$$k\, d^2T/dx^2 + Q = 0 \qquad 0 < x < L$$

$$T = 0 \ \text{ para } \ x = 0 \ \text{ y } \ x = L$$

El valor de la temperatura T que satisface esta ecuación diferencial y sus condiciones de contorno puede encontrarse en este caso sencillo por integración directa de la misma (otra aportación del cálculo de Newton y Leibnitz). Una primera integración proporciona

$$dT/dx = -Q/k + A$$

donde A es una constante. Repitiendo la integración se llega a

$$T = -(Q/2k)x^2 + Ax + B$$

Las constantes A y B se obtienen utilizando la condición que establece que la temperatura es nula en los extremos de la barra. Tras unas sencillas operaciones se llega a la fórmula final

$$T = (Q/2k)(L-x)\,x$$

La expresión anterior proporciona el valor de la temperatura en cualquier punto de la barra. Para calcular dicho valor basta con sustituir en la ecuación la coordenada x de dicho punto y los valores de Q, k y L. La fórmula muestra también claramente que en este caso concreto la temperatura varía a lo largo de la barra según un polinomio de segundo grado y toma el valor máximo en el centro de la barra donde la temperatura alcanza $QL^2/8k$ grados (ver Figura 3).

Este sencillo ejemplo contiene numerosos matices que ilustran el papel de las matemáticas en el desarrollo de las ciencias aplicadas. En primer lugar, hay que advertir que la ecuación diferencial de gobierno del problema se ha obtenido mediante la técnica de establecer el balance de flujo en un segmento infinitesimal arbitrario sobre la barra. Este procedimiento es completamente general y se utiliza para escribir las ecuaciones diferenciales de gobierno en todos los problemas de la mecánica, ya se trate de sólidos, fluidos, gases y también en electromagnetismo.

En segundo lugar, para obtener la expresión completa de la ecuación de balance térmico en función de la temperatura, ha sido necesario emplear una relación empírica (la ley de Fourier). Este es el caso también en las demás áreas de la mecánica arriba mencionadas, en las que dicha relación empírica tiene diferentes acepciones según el problema en cuestión. En ingeniería dicha relación recibe el nombre genérico de ecuación «constitutiva» o «ley de comportamiento del material», ya que en ella intervienen las propiedades físicas del medio bajo estudio. Dos ejemplos típicos son: la relación entre tensiones y tasas de deformación en un fluido a través de la viscosidad del mismo, y la relación entre tensiones y deformaciones en un sólido elástico, más conocida como ley de Hooke (1635-1703), expresada por medio de constantes que caracterizan el comportamiento mecánico del sólido. Aunque dichas constantes toman diferentes nombres, las dos más conocidas en el caso más simple y usual, son las de módulo de Young y el coeficiente de Poisson, en honor de los matemáticos y mecanicistas, T. Young (1773-1829) y S.D. Poisson (1781-1840). Otra evidencia de la extraordinaria simbiosis entre matemática, física e ingeniería de los siglos XVIII y XIX.

El tercer aspecto remarcable en relación con la ecuación de la transmisión del calor estudiada, es que hemos podido encontrar una solución *analítica* al problema. Es decir, mediante la integración de la ecuación diferencial original, hemos llegado a una expresión matemática para la temperatura, que proporciona su valor en cualquier punto de la barra para cualesquiera que sea la longitud de la barra, la cantidad de calor Q que se aporta (o se extrae) desde el exterior y el coeficiente de conductividad térmica. Esta expresión es, por tanto, la *fórmula universal* a la que aspiraban los pitagóricos, la ecuación sublime que permite conocerlo todo (la temperatura) «a priori» para cualquier barra en circunstancias similares (las mismas condiciones de contorno). Los números que caracterizan la solución del problema, nos informan sobre si la temperatura es alta o baja en cada punto de la barra, y nos permiten tomar decisiones sobre si el material de la barra es el adecuado, si conviene o no aislar térmicamente un extremo, si la aportación de calor exterior es excesiva, o si la barra es demasiado larga o corta. Todos estos valores numéricos, sobre los que basaremos nuestra decisión, surgen automáticamente de la expresión matemática que proporciona la temperatura en cada punto de la barra como una función de Q, k, L y su distancia al extremo izquierdo. El universo de los números aparece de nuevo, como por sorpresa, rodeado de un halo de luz que ilumina la solución de un problema sobre el que antes de Newton y Leibnitz no sabíamos nada y después de ellos lo sabemos todos.

El éxito en ejercicios de este tipo incentivó el desarrollo de las aplicaciones de la nueva matemática en todas las áreas científicas y tecnológicas. El trinomio formado por las ecuaciones diferenciales de gobierno del problema, obtenidas a partir de principios de balance, las ecuaciones de comportamiento de los materiales, basadas en desarrollos empíricos, y la integración de las ecuaciones diferenciales, proporcionando soluciones analíticas «universales», han sido la base de innumerables avances en disciplinas tales como la mecánica de sólidos y estructuras, la dinámica de fluidos, el electromagnetismo, la física de partículas y la transmisión del calor, por citar sólo unas cuantas.

Las implicaciones de estos descubrimientos en el progreso de la ciencia y la tecnología del siglo pasado y de principios de éste han sido, como es bien conocido, incuestionables.

Métodos numéricos

El optimismo que los primeros éxitos del cálculo infinitesimal infundió a la comunidad científica se vio matizado en posteriores aplicaciones por una desagradable evidencia: si bien todo problema podía plantearse en forma matemática por medio de ecuaciones diferenciales, la solución «analítica» de dichas ecuaciones sólo era posible para algunos casos particulares, que en ocasiones eran groseras simplificaciones de la realidad. Las dificultades que presentaba encontrar la fórmula matemática universal en problemas complejos, por otra parte de gran interés práctico, tales como, por ejemplo, el estudio de la propagación de una grieta en el casco de un barco, la predicción del desplome de una estructura de edificación, o el análisis del flujo del aire alrededor de un avión, hizo patente la necesidad de encontrar formas alternativas de resolver las ecuaciones diferenciales para dichos problemas.

Así, a principios de este siglo, diversos científicos observaron que si las ecuaciones diferenciales se particularizaban para un problema concreto (por ejemplo, si en el problema de la transmisión del calor en la barra antes descrito se sustituyen los valores de Q, k y L por los correspondientes a una barra real), entonces, utilizando aproximaciones de las derivadas que aparecen en esas ecuaciones podían llegar a obtenerse los valores numéricos de la función incógnita (la temperatura en el problema de la barra) en diversos puntos del dominio de análisis. Habían nacido los denominados *métodos numéricos*.

La gran diferencia entre los *métodos numéricos* y los *métodos analíticos* es, por tanto, que los últimos buscan la fórmula matemática universal que representa la solución general de un problema gobernado por ecuaciones diferenciales. Los métodos numéricos, por otra parte, proporcionan la solución en forma de números a las ecuaciones diferenciales que gobiernan un problema concreto. Para aclarar ideas, recordemos que la solución analítica del problema de transmisión de calor en la barra, con temperatura nula en sus extremos ($T = (Q/2k)(L-x)x$), proporciona la fórmula general de la distribución de temperatura en una barra cualquiera con propiedades cualesquiera. La solución de este problema por un *método numérico* proporcionaría directamente los valores de la temperatura en una serie de puntos de una barra de longitud determinada, para unos valores también concretos de la conductividad k y de la fuente de calor Q.

Los métodos numéricos representan, por consiguiente, el retorno de los números como los auténticos protagonistas de la solución de un problema. El bucle iniciado por Pitágoras en su escuela numerológica de la isla de Crotona hace 2.500 años se ha cerrado, por tanto, en las últimas décadas con la evidencia de que sólo con ayuda de los métodos numéricos podemos obtener respuestas concretas a los enigmas de la naturaleza. La luz que irradian esos números ilumina, pues, nuestros pasos, alumbrando el camino que debemos seguir en busca de soluciones a los problemas más diversos.

Los métodos numéricos más populares se basan en *técnicas de discretización*. Con algo de ligereza estas técnicas pueden interpretarse como la versión matemática del principio de «divide y vencerás». La aplicación más clásica de las técnicas de discretización se encuentra en el procedimiento utilizado por Arquímedes para el cálculo del número π, a partir del perímetro de polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia (Figura 1). Obviamente, al aumentar el número de lados, mejora el valor de π obtenido. El gráfico de la Figura 1 indica la mejora en la precisión en el cálculo de π con el número de lados para los casos de polígonos inscritos y circunscritos. Una técnica similar fue utilizada por los calculistas chinos en el siglo V d.C para estimar el área del círculo mediante la suma del área de rectángulos interiores (Figura 2).

Estos ejemplos ilustran los conceptos esenciales de los métodos numéricos. El primero, es el de *discretización* de un problema a partir de entidades o elementos individuales cuyas propiedades se conocen. El polígono y el rectángulo serían los «elementos» utilizados para discretizar (dividir) la circunferencia y el círculo, respectivamente. El segundo concepto, es que la solución es *aproximada*. Dado que el número π contiene infinitas cifras, sólo pueden obtenerse un número finito de éstas. De las ideas de aproximación se desprenden naturalmente las de *error* (diferencia entre la solución numérica y la teóricamente «exacta») y *convergencia* de la solución numérica al valor teórico. Las gráficas de la Figura 1 muestran como «converge» el valor de π al valor «exacto» (obtenido con 80 cifras decimales mediante el ordenador) para los dos tipos de discretización (polígono inscrito y circunscrito) utilizados.

La versión actual del método numérico empleado por Arquímedes son los denominados métodos de *diferencias finitas*, de *elementos finitos*, de *elementos de contorno* y de *puntos finitos*, por citar algunos de los más populares. La revisión de cada método es una tarea imposible en pocas líneas y daremos aquí únicamente unas pinceladas esenciales.

La estrategia común de todos los métodos numéricos es la transformación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan un problema, en un sistema de ecuaciones algebraicas que dependen de un número finito de variables que son las nuevas incógnitas del problema. Dicho sistema de ecuaciones puede entonces resolverse por medio de técnicas de álgebra lineal estándar. No obstante, puesto que el número de incógnitas resultantes del proceso de discretización es en la mayoría de los casos de muchos miles (e incluso millones), el sistema de ecuaciones final sólo puede resolverse con la ayuda del ordenador. Esto explica por qué, aunque muchos de los métodos numéricos eran conocidos desde el siglo XIX, su gran desarrollo y popularidad han sucedido paralelos al de los modernos ordenadores en este siglo.

La diferencia entre los distintos métodos numéricos estriba fundamentalmente en la técnica de discretización utilizada para transformar un problema matemático de naturaleza *continua*, por otro problema *discreto* dependiente de un número finito de incógnitas. En el *método de diferencias finitas* (MDF) probablemente el decano de los métodos numéricos contemporáneos, la técnica empleada es dividir el dominio de análisis en una retícula, preferiblemente regular. Las incógnitas del problema son entonces los valores de cada variable (la temperatura, el desplazamiento, etc.) en cada nudo de la retícula. Estableciendo ahora que las ecuaciones diferenciales de gobierno se cumplen en cada nudo y expresando cada derivada en el nudo por las diferencias (de ahí el nombre del método) entre las incógnitas en nudos adyacentes, se obtiene de forma metódica y sencilla el sistema de ecuaciones algebraico buscado. Como puede intuirse, la precisión del MDF depende fundamentalmente de la densidad de la retícula y de la fórmula de diferencias utilizada para calcular las derivadas en cada nudo. El MDF se popularizó en la década de los años cincuenta para resolver una gran variedad de problemas, entre los que destacan el análisis de sólidos elásticos, la transmisión del calor y la dinámica de fluidos, siendo todavía muy utilizado en este último campo.

Un método numérico que goza de gran popularidad hoy en día es el método de elementos finitos (MEF). La técnica de discretización del MEF es la división del dominio de análisis en una malla, regular o irregular, compuesta por formas geométricas sencillas, tales como triángulos o cuadriláteros en dos dimensiones, o tetraedros y hexaedros en tres. Dentro de cada elemento se define un polinomio que expresa la variación de las incógnitas del problema en función de sus valores en puntos (nodos) situados en los contornos y el interior del elemento. El paso siguiente es imponer el cumplimiento de las ecuaciones diferenciales de gobierno de forma media (o integral) sobre cada elemento. El resultado del proceso de discretización del MEF es, de nuevo, un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son los valores nodales.

En la Figura 4 se muestra de forma esquemática el proceso de análisis de la resistencia de un puente por el MEF. A partir de la geometría inicial se obtiene la malla de elementos rectangulares que discretizan la losa superior y las vigas. Finalizado el proceso de cálculo, se obtiene una radiografía completa del comportamiento del puente bajo las cargas actuantes, como, por ejemplo, su geometría deformada, las deformaciones y las tensiones en cada punto, etc.

El proceso de «discretización» del puente es conceptualmente similar al utilizado por Arquímedes para calcular el perímetro de la circunferencia mediante su división en polígonos. Asimismo, los rectángulos de la Figura 4 juegan también un papel análogo a los utilizados por los calculistas chinos para evaluar el área del círculo en el siglo V d.C. (Figura 2).

Desde el punto de vista del ingeniero de estructuras el método de los elementos finitos puede considerarse como una extrapolación de los métodos de cálculo matricial para estructuras de barras al análisis de estructuras de tipo continuo. De hecho, a principios de los años 1940, surgen los primeros intentos de resolver problemas de elasticidad bidimensional con técnicas matriciales mediante la división del continuo en elementos de barra. Precisamente en 1943, R. Courant (1888-1972) introdujo por primera vez el concepto de «elemento continuo» al resolver problemas de elasticidad plana mediante la división del dominio de

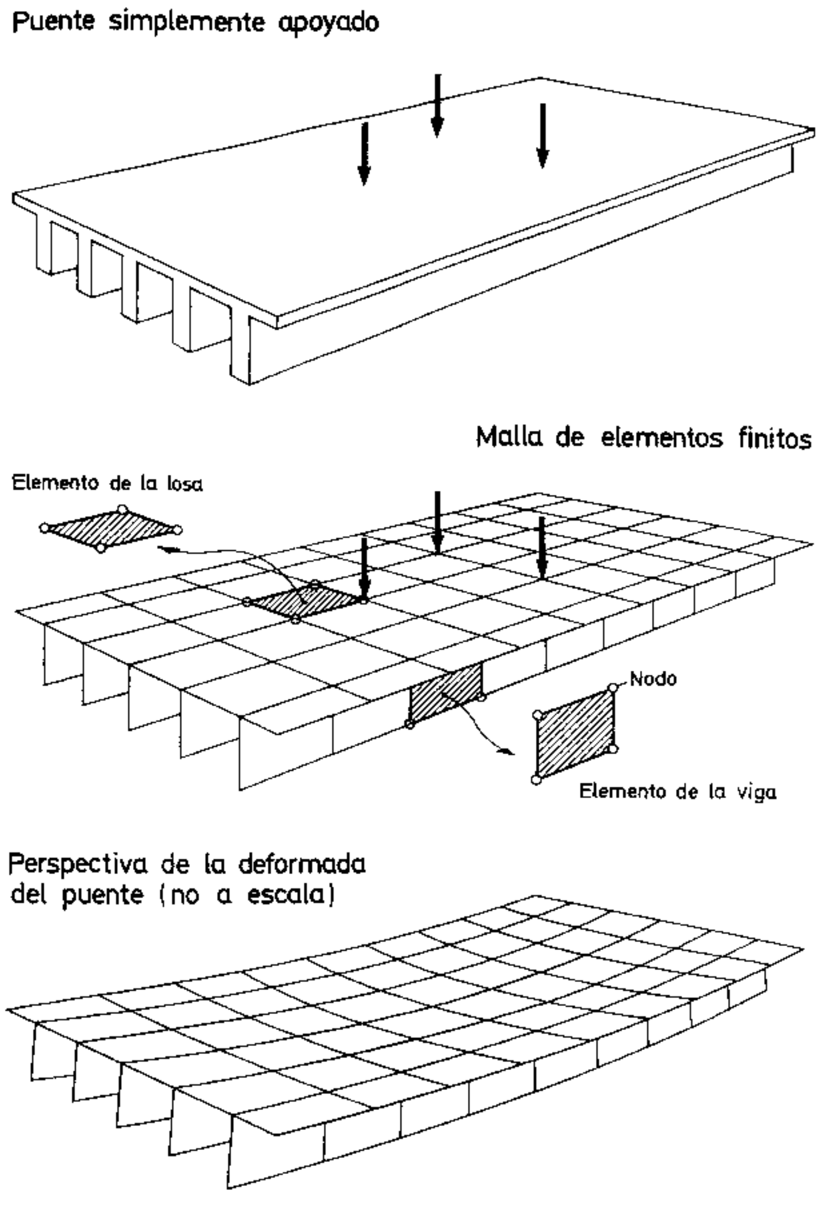


Figura 4. Análisis de la deformación de un puente por el método de elementos finitos.

análisis en «elementos» triangulares sobre los que suponía una variación polinómica de la solución.

La irrupción masiva de los ordenadores digitales en la década de los 60, propició un avance espectacular de todos los métodos numéricos basados en técnicas matriciales, libres ya de las limitaciones que suponía hasta la fecha la solución de grandes sistemas de ecuaciones. Es en esta época cuando el método de los elementos finitos se consolida rápidamente como un procedimiento apropiado para solución de toda una variedad de problemas de ingeniería y de física. Es importante advertir que, en este contexto, sus primeras aplicaciones surgen en relación con problemas de cálculo de estructuras y, en particular, con aplicaciones estructurales en ingeniería aeronáutica. De hecho, fue R. Clough de la Universidad de Berkeley, quien en 1960, y en relación con la solución de problemas de elasticidad plana, sugirió por primera vez la denominación «elementos finitos». Desde esas fechas hasta la actualidad, el MEF ha tenido un desarrollo espectacular en su aplicación a otros campos. Así, apoyado por el avance de los ordenadores digitales el MEF disfruta hoy en día de una posición única como una técnica de solución potente de los problemas más diversos y complejos en innumerables campos de la ingeniería y la ciencia desde el análisis estructural de edificios históricos, hasta el cálculo de la resistencia de un hueso del cuerpo humano; desde el estudio de la aerodinámica de un avión, hasta la evaluación del flujo de la sangre en las venas.

En el *método de elementos de contorno* (MEC), las ecuaciones matemáticas del problema se simplifican de manera que en su forma resultante sólo intervienen expresiones sobre los contornos del dominio de análisis. Ello permite realizar la discretización únicamente sobre dichos contornos. El MEC permite así un ahorro de cálculo substancial en la solución de problemas en donde la simplificación anterior es posible o sencilla, tales como problemas con propiedades lineales gobernados por la ecuación de Laplace (transmisión del calor, flujo en medio poroso, electromagnetismo, etc.), análisis de sólidos y estructuras. Pese a sus innegables ventajas en algunos casos, el MEC no es todavía tan utilizado como el MEF para la solución de problemas industriales.

No podemos concluir esta breve reseña sobre métodos numéricos sin mencionar el reciente auge de los métodos basados en discretizaciones utilizando únicamente un número finito de puntos. Estos métodos, adjetivados comúnmente *sin malla*, de *partículas* o de *puntos finitos* (MPF), tienen la ventaja de no necesitar la usualmente costosa construcción de una malla sobre el dominio de análisis; basta con «rellenar» su interior con un gran número de puntos a los que se asocian los valores de las incógnitas del problema. El conjunto de puntos próximo a un punto concreto se denomina «nube». La variación de cada incógnita en el interior de una nube se expresa en función de las variables en cada punto de la misma utilizando técnicas de mínimos cuadrados ponderados. El paso final es imponer el cumplimiento de las ecuaciones diferenciales de gobierno del problema sobre cada nube (en forma integral), o bien directamente en cada uno de los puntos que discretizan el dominio. En ambos casos se llega al sistema de ecuaciones algebraico buscado, cuya solución conduce a los valores numéricos de las incógnitas en cada punto.

Perspectivas de los métodos numéricos

Como ha quedado evidenciado a lo largo de la historia, los avances en ciencia y tecnología han ido siempre paralelos al mejor conocimiento del hombre de los fenómenos de la naturaleza y del impacto que sus intervenciones tienen en éstos. La necesidad de «cuantificar» la solución de un problema, bien sea éste el diseño y construcción de un avión, la predicción de la vida de una célula, o la producción más económica de envases para alimentos, es ineludible. El aura de los números, que desde el inicio de los tiempos ha fascinado al hombre, encuentra en la ciencia e ingeniería modernas una razón de ser, una utilidad tan característica a través de los métodos numéricos, que ha sido el motor de gran parte de los desarrollos actuales en todas las disciplinas científico-técnicas.

La explicación es clara, reproducir o cuantificar la solución de un problema «real» es una tarea ímproba en la mayor parte de los casos y exige en ocasiones, tales como el estudio preciso de la propagación de una grieta en el fuselaje de un avión o en el análisis de la seguridad de pasajeros durante el impacto de un vehículo, modelos de cálculo discretos con cientos de miles, y en ocasiones millones, de incógnitas. Obviamente, en cada momento de la historia el hombre ha adaptado sus modelos a los medios de cálculo disponibles, obteniendo resultados más o menos aproximados, aunque siempre de utilidad. Es, precisamente, al aumentar espectacularmente los medios informáticos en los últimos treinta años, cuando se produce un salto cualitativo en los retos que los científicos e ingenieros han podido abordar con éxito con ayuda de los métodos numéricos.

Simplificando quizás demasiado, los avances recientes que más han influido en la popularidad de los métodos numéricos en la solución de problemas progresivamente más complejos en ciencia y tecnología, han sido: el desarrollo de nuevas técnicas numéricas basadas en combinaciones de métodos tales como los de diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos y puntos finitos antes descritos; los progresos en las técnicas de álgebra matricial para resolver de forma más eficiente los grandes sistemas de ecuaciones algebraicas resultantes del método de discretización; la existencia y caracterización de nuevos materiales con óptimas relaciones entre resistencia y peso y, finalmente, la disponibilidad de ordenadores con crecientes recursos de memoria y mayor velocidad de cálculo, a través de nuevas arquitecturas de ordenadores paralelos con memoria distribuida o compartida.

Los temas anteriores forman un conjunto indisociable, de manera que hoy en día es impensable abordar el desarrollo de un método original para solución de un nuevo problema en ciencia o ingeniería, sin tener en cuenta todos los ingredientes mencionados. Por ejemplo, cualquier nuevo método numérico tiene que desarrollarse actualmente teniendo en cuenta la plataforma informática en la que se implementará para resolver problemas de gran escala (probablemente en ordenadores paralelos). Asimismo, es impensable un programa de ordenador moderno que no incorpore, o pueda incorporar, los continuos avances en la modelización de materiales avanzados.

La palabra que quizás puede sintetizar el futuro más inmediato de las aplicaciones de los métodos numéricos es «multifísica». Los problemas no se abordarán más desde la perspectiva de un único medio físico, e incorporarán todos los acoplamientos que caracterizan la complejidad de la realidad. Así, por ejemplo, el diseño de una pieza de un vehículo (un avión, un automóvil, etc.) se realizará teniendo en cuenta el proceso de fabricación y la función que dicha pieza ejercerá a lo largo de su «vida útil». Las estructuras en ingeniería civil se estudiarán teniendo en cuenta los efectos con el medio circundante (el terreno, el agua, el aire). Ejemplos similares pueden encontrarse en ingeniería naval y aeronáutica, entre otras, así como en prácticamente todas las áreas de la ciencia. La importancia de tener en cuenta el carácter «estocástico» (no determinista) de todos los datos será esencial para estimar la probabilidad de que los nuevos productos y procesos concebidos por el hombre se comporten de la forma prevista. Los próximos previsibles cálculos en el marco de la «multifísica estocástica» requerirán enormes recursos informáticos, nuevos y más potentes métodos numéricos y modelos físicos avanzados.

Sólo desde la perspectiva de una estrecha cooperación entre todas las partes del triángulo formado por el conocimiento profundo de las bases físicas y matemáticas de cada problema, los métodos numéricos y la informática, podrán encontrarse soluciones efectivas a los megaproblemas del inicio del próximo siglo. Esa cooperación deberá verse reflejada también en un mayor énfasis en la optimización de los recursos materiales y humanos necesarios para afrontar con garantías el cambio de escala de los problemas a resolver y, sobre todo, en la puesta en marcha de acciones de formación innovadoras para preparar a las nuevas generaciones, que, con la ayuda de los números, deberán pilotar con éxito la solución de problemas multidisciplinares.

Bibliografía

J.J. Argyris y S. Kelsey, "*Energy theorems and structural analysis*", Butterworth, 1960.

M.E. Baron, *The origins of infinitesimal calculus*, Dover Publications, 1987.

J.D. Barrow, *¿Por qué el mundo es matemático?*, Grijalbo-Mondadori 1997.

P. Beckmann, *A history of π*, The Golem Press, 1971.

E.T. Bell, *The magic of numbers*, Dover Publications, 1991.

E.T. Bell, *The development of mathematics*, Dover Publications, 1992.

C.A. Brebbia y J. Domínguez, "*Boundary elements. An introductory course*", *Computational Mechanics Publ.*, Mc.Graw Hill, 1989.

R.W. Clough, «The finite element method in plane stress analysis», *Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. in Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa. Sept. 1960.

R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration", *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. **49**, pp. 1-23, 1943.

P.J. Davis y R. Hersch, *El sueño de Descartes*, Editorial Labor, 1989.

C.A.M. Duarte, "A review of some meshless methods to solve partial differential equations", *TICAM Report 95-06*, The Univ. of Texas, Austin, May 1995.

H.M. Enzensberger, *El diablo de los números*, Ediciones Siruela, 1997.

G. Frey, *La matematización de nuestro universo*, G. del Toro Editor, 1972.

J.L. González, M.D. Iriarte, M. Jimeno, A. Ortiz, E. Sanz, A. Ortiz y F. Vargas-Machuca, *Números enteros,* Síntesis 1990.

D. Guedy, *El imperio de las cifras y los números,* Ediciones B., 1998.

C. Hirsch, "*Numerical computations of internal and external flows*", J. Wiley, Vol. I -1988, Vol. II – 1900.

L. Hobben, *Mathematics for the millions*, Pan Books, London 1967.

A. Hrenikoff, "Solution of problems in elasticity by the framework method", *J. Appl. Mech.,* Vol. 18, pp. 169-175, 1991.

G. Ifrah, *Historia universal de las cifras*, Espasa, 1997

T. Kiang, «An old chinese way of finding the volume of a sphere», *Math. Gazette,* LVI, 88-91, 1972.

D. Mc.Henry, "A lattice analogy for the solution of plane stress problems", *Inst. Civ. Engng.,* Vol. 21, pp. 59-82, 1943.

E. Oñate, "*Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos*", CIMNE, Barcelona, 1992.

E. Oñate y S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow", *Int. J. Num. Methods in Engngn,* Vol. 39, pp. 3839-3866, 1996.

J. Rey Pastor y J. Babini, *Historia de la matemática* (dos volúmenes), Editorial Gedisa, 3ª edición, 1997

J.A. Paulos, *El hombre anumérico*, Metatemas, 1988

L.F. Richardson, "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems", *Trans. Roy. Soc.* (London), A210, pp. 305-357, 1910.

S. Singh, *El enigma de Fermat*, Editorial Planeta, 1997.

R.V. Southwell, "*Relaxation methods in theoretical physics*", Clarendon Press, 1946.

M.J. Turner, R.W. Clough, H. Martin y L.J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *J. Aeron. Sci.*, Vol. 23, pp. 805-823, 1956.

O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "*El método de los elementos finitos*", McGraw Hill-CIMNE, Barcelona, Vol. I -1993, Vol. II - 1994.

DISCURS DE CONTESTACIÓ

PER L'ACADÈMIC NUMERARI

EXCM. SR. DR. DAVID JOU i MIRABENT

Honorable Sr. Conseller,
Excm. Senyor President de l'Acadèmica,
Excms. Senyors Acadèmics,
Senyores i Senyors:

M'és un honor poder donar la benvinguda a la Reial Acadèmia de Doctors al nou Acadèmic, Prof. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra. Presentar una visió concisa i panoràmica de les seves obres és el millor elogi que en podríem fer, la millor justificació de l'encert de l'Acadèmia en la seva designació.

Nascut a València el 28 de març de 1953, Eugenio Oñate obtingué a la Universitat Politècnica d'aquesta ciutat el títol d'Enginyer de Camins, Canals i Ports el 1975. El 1979 guanyà el títol de Doctor in Philosophy (Ph.D.) a l'University College de Swansea, al país de Gal.les amb una tesi dirigida pel Prof. Zienkiewicz, tesi que seria convalidada el mateix any per la Universitat Politècnica de València.

Des de 1979, el Dr. Oñate ha estat professor de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de la Universitat Politècnica de Catalunya, de la qual és, des de 1983, catedràtic de Mecànica de Medis Continus i Teoria d'Estructures, i de la qual ha estat director en el període 1983-1989 i director del Departament de Resistència de Materials i Estructures de 1992 a 1995. El Prof. Oñate és un expert internacionalment reconegut en Mètodes numèrics, i ha estat l'impulsor i director del Centre Internacional de Mètodes Numèrics en Enginyeria (CIMNE), centre que enriqueix i consolida la presència internacional de Barcelona en el camp de l'enginyeria, decisiu per a la nostra competitivitat industrial.

Dintre d'aquesta àrea de treball, el Prof. Oñate ha estat fundador i és el president de la Societat Espanyola de Mètodes Numèrics en Enginyeria, i també va ésser president del Consell Científic del Centre de Supercomputació de Catalunya (CESCA), una de les instal.lacions de càlcul imprescindibles per als nostres investigadors. A escala internacional, ha estat Vicepresident de l'European Association for Computational Methods in Applied Sciences i és actualment secretari general de la International Association for Computational Mechanics.

La seva activitat científica es concreta en la direcció de 31 projectes de recerca i desenvolupament, per valor de més de 750 milions de pessetes, relacionats amb indústries com SEAT, CASA, Pegaso, Bazán, Hidroelèctrica de Catalunya, Iberdrola, Dassault Aviation, NASA, per esmentar-ne tan sols unes poques entre moltes d'altres també força conegudes. Ha publicat 72 articles en revistes internacionals, 24 capítols en llibres, 156 treballs en actes de congressos i 86 contribucions a revistes internes de centres d'investigació. Ha escrit un llibre sobre càlcul d'estructures pel mètode d'elements finits i deu monografies especialitzades. Ha estat organitzador de 21 congressos internacionals i editor de les corresponents actes, així com de dues revistes internacionals, i ha dirigit 24 tesis doctorals. Forma part del consell editorial de quinze revistes internacionals, i és membre de comitès científics de diversos centres, com ara el Centre d'Estructures i Materials de l'Escola Superior de Mines de París i de l'Institut Mediterrani de Tecnologia de Marsella. Per aquesta intensa activitat, ha rebut, entre d'altres distincions, la Medalla Narcís Monturiol de la Generalitat de Catalunya al Mèrit Científic i Tecnològic (1990), la Medalla al Mèrit Professional del Col.legi d'Enginyers de Camins, Canals i Ports (1995) i l'Eric Reissner Medal in Computational Structural Mechanics (1996).

Els seus temes de recerca estan relacionals amb el desenvolupament i l'aplicació de mètodes de càlcul, basats fonamentalment en tècniques numèriques d'elements finits, per a l'anàlisi i disseny d'estructures en enginyeria civil, mecànica, aeronàutica i naval, i en l'anàlisi de processos de fabricació de peces metàl.liques per procediments industrials diversos. Ha realitzat anàlisis aerodinàmiques de vehicles aeroespacials, anàlisis hidrodinàmiques de vaixells, estudis de problemes de transferència de calor i de massa en mecànica de fluids, i de pròtesis en bioenginyeria. També ha manifestat una considerable activitat en la renovació i l'ampliació de l'ensenyament dels nous mètodes de càlcul que fan possibles aplicacions cada vegada més complexes.

No cal donar més detalls, que allargarien innecessàriament aquesta presentació, per fer evident l'extraordinària vàlua científica i tecnològica de qui avui s'incorpora a la nostra Acadèmia, i el molt que podem esperar dels seus coneixements i del seu prestigi.

Em plau ara contestar, Dr. Oñate, el vostre discurs d'ingrés. En ell ens heu parlat de la història dels nombres i de la seva relació amb el coneixement de la naturalesa. Convé que sapigueu que l'Acadèmia compta amb un membre de reputació internacional en teoria de nombres, la Dra. Pilar Bayer. Ella us podria contestar millor que no pas jo sobre els nombres en la seva puresa abstracta, sobre les seves propietats més subtils, sobre aquella bellesa impressionant que ens fa sentir en ells un hàlit d'eternitat, com el que Plató assignà a les idees. Jo vaig ser alumne de la Dra. Bayer i tinc molt presents, entre els records més vius de la carrera, l'entusiasme que la il.luminava sovint en les classes, i que ens feia veure en l'àlgebra de primer, o en la introducció a la teoria de Galois de segon, un horitzó amplíssim que prometia no tan sols aplicacions fecundes i poderoses sinó també aventures intel.lectuals inacabables.

Però vos heu parlat, més que de matemàtica pura, de com els nombres ens descobreixen les lleis que regeixen la realitat física. Qui més qui menys, ha sentit en alguna ocasió com els nombres ens fan sentir més posseïdors de la realitat. Sempre m'he preguntat per la sensació que degué experimentar Eratòstenes d'Alexandria en avaluar, per primera vegada, el radi de la Terra, a partir d'un enginyós joc d'ombres. ¡Quina eufòria de revelació, quina sensació de possessió d'un secret i d'intimitat amb el món degué representar aquell moment!. Quina diferència entre postular que la el nostre planeta sigui una esfera, i poder-ne precisar numèricament la grandària!. Per a això darrer, cal haver trobat no tan sols arguments abstractes relativament convincents, sinó elements de realitat prou eloqüents per respondre a les nostres preguntes.

No és imprescindible, però, acudir a la història de les matemàtiques o de la física o de l'astronomia per fer-nos sentir aquest tast de possessió i d'embriagament. Algunes obres literàries ens ho han manifestat, de forma indirecta i força diferent, és cert, a aquella amb què vós ho heu fet en referir-vos a les lleis de la naturalesa. Recordeu, per citar només dos exemples, el *Robinson Crusoe*, de Daniel Defoe, o l'*Eugénie Grandet*, d'Honoré de Balzac: es tracta de dues obres en què si bé els nombres no tenen aquella mística d'una revelació a què al.ludiu en el text del vostre discurs, sí que manifesten, en canvi, l'avidesa d'una possessió. En aquestes cèlebres novel.les, els queviures i les pertinences de Robinson, o les propietats monetàries o immobiliàries del père Grandet, són classificades i recomptades una i altra vegada, en una comptabilitat precisa i minuciosa, que dóna a cada clau, a cada cordill, a cada moneda, a cada terreny, una realitat intensa, una il.luminació nítida i plena de relleu com la de la llum de la tarda.

En aquestes obres, les passions numerals estan lligades amb l'economia. No podem oblidar que aquesta és, precisament, una altra de les grans quantificadores de la nostra realitat. Pressupostos, canvis de moneda, índexs de preus al consum, taxes d'atur i d'inflació, cotitzacions en borsa, tempestes monetàries: quins grans trasbalsaments numèrics!. I quin afany de descobrir, rera els nombres, unes lleis segures o probables, d'assolir un poder predictiu prou satisfactori!. Per a una gran part del públic, les relacions més vives amb els nombres s'estableixen, precisament, a aquest nivell. I a aquest nivell percep, algunes vegades, la desolació del zero, aquest nombre misteriós i fèrtil que trobà, per cert, una etapa del seu camí cap a Europa en el monestir de Ripoll, on el jove monjo Gerbert d'Aurillac, posteriorment papa Silvestre II, l'aprengué en els textos àrabs, com vós ens ho recordeu.

Jo, com a físic, he tractat els nombres d'una manera relativament semblant a la vostra, en la seva conexió més directa amb la realitat. Cap a la fi del vostre discurs heu al.ludit amb especial èmfasi a les equacions diferencials, a la resolució numèrica de les quals heu dedicat una part tan considerable de la vostra activitat científica. Deixeu-me, doncs, referir-me especialment a una equació diferencial a la qual vós heu dedicat força atenció en moltes ocasions: l'equació de Navier-Stokes, que descriu el comportament dels fluids usuals. Quina meravella de síntesi!: tota la fenomenologia dels fluxos més diversos de l'aigua, de l'aire, de tants altres fluids; les seves aplicacions al món naval i aeronàutic, al món de la biologia i de la geologia, i els reptes fascinants de les transicions espectaculars i intrigants alhora de la laminaritat a la turbulència: quina diversitat i acumulació de coneixements en una sola equació!. En faré tres reflexions, relacionades, com vós ens proposàveu, amb la seva relació amb la realitat.

La primera es refereix a la pregunta de com pot una sola equació descriure i explicar fenòmens tan diversos com els que he esmentat. Cal subratllar, aquí, el paper decisiu de les condicions de contorn. És cert que l'equació és universal, però les condicions de contorn són específiques de cada problema, i és a elles, a la seva infinita diversitat, a què es deu la gran varietat de comportaments diferents que pot descriure una sola equació. Quan parlem del valor universal de la ciència, convé recordar que aquesta no pot eludir les subtileses locals que li imposen les condicions de contorn. Ben al contrari, són elles les que la fan confluir amb el món concret. En el vostre treball d'enginyer, aquestes restriccions poden venir sovint de l'entorn natural: la geometria d'una cala, l'orografia d'un paisatge, la forma d'una platja. En altres ocasions, la forma concreta d'un objecte és desconeguda i l'heu d'optimitzar per realitzar una determinada funció: el perfil d'una ala d'avió, d'un vaixell o d'un automòbil. El llenguatge universal de la ciència no nega la localitat concreta del món natural o artificial, ans la considera atentament com una de les seves fonts d'inspiració i d'estímul, com un dels seus reptes més fructífers.

En segon lloc, vull destacar com en el vostre treball passeu d'una descripció contínua de la realitat a una descripció discreta. Aconseguiu així passar d'equacions diferencials, de dificultat sovint insalvable des del punt de vista analític, a equacions algebraiques amb milers d'incògnites, practicables en principi però indescriptiblement tedioses, i que no podríeu resoldre, com heu dit, sense l'ordinador. Quantes dificultats cal vèncer i quantes precaucions cal prendre en aquest viatge del continu al discret, quan les equacions no són purament lineals!. La repetició milers de vegades d'un algoritme té efectes acumulatius sobre els errors d'arrodoniment. En els sistemes no lineals, aquestes acumulacions poden ser catastròfiques, i pot ser que el resultat de l'ordinador no tingui res a veure amb la realitat. S'imposa, doncs, no tan sols un gran rigor conceptual en els mètodes de discretització emprats i un bon coneixement de les subtileses que ens va descobrint la teoria del caos determinista, sinó també un gran sentit crític i una fina intuïció per tal d'esbrinar si el resultat de l'ordinador en una situació completament nova i desconeguda és fiable o bé si és un artefacte de càlcul.

En tercer lloc, cal recordar que moltes equacions de la física no són exactes, sinó aproximades, i tenen, per tant, un límit d'aplicabilitat. L'equació de Navier-Stokes, per exemple, no és vàlida per a la descripció de certes subtileses dels fluids no newtonians, com ara la sang, el petroli o les suspensions polimèriques, de tant d'interés pràctic; tampoc no són vàlides en gasos molt enrarits, com els de les capes altes de l'estratosfera, per on circularan els avions de llarg recorregut del futur. Quina és l'equació que cal utilitzar en aquests casos? Com hem de modificar l'equació ja coneguda per tal d'eixamplar-ne el domini d'aplicació i poder-nos adaptar a noves possibilitats?.

He intentat, doncs, esmentar una altra mena de nombres, que també apareixen com a teló de fons de les vostres investigacions: els nombres de l'economia, que mai no poden ser oblidats per un enginyer, i referir-me a tres exemples de com malgrat tenir el nombre per llenguatge i una equació prestigiosa i explorada durant més d'un segle, la relació entre el nombre i la realitat segueix estant plena de subtileses i preguntes. Un investigador com vós està ben avesat a totes aquestes subtileses i en coneix tots els envitricolls: ells són, precisament, les dificultats davant les quals es mesura en enginy i creix en experiència. Us felicitem pel camí fet, que us pot enorgullir personalment i que enriqueix amb noves possibilitats el nostre país, i us desitgem que l'éxit segueixi acompanyant el vostre esforç com fins ara. Esperem poder tenir el plaer, com a col.legues en aquesta Acadèmia, de seguir-ho ben de prop, d'aprendre'n molt, i d'alegrar-nos, encara amb més motiu que fins avui, per les fites que seguireu assolint.

ÍNDICE

NOVES PUBLICACIONS DE LA REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

Directori 1991.

Los tejidos tradicionales en las poblaciones pirenaicas (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Eduardo de Aysa Satué, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Antoni Plana i Castellví, Doctor en Geografía i Història), 1992.

La tradición jurídica catalana (Conferència magistral del acadèmic de número Excm.Sr. Josep Joan Pintó i Ruiz, Doctor en Dret, en la Solemne Sessió d'apertura de curs 1992-93, que fou presidida per SS.MM. el Rei Joan Carles I i la Reina Sofía), 1992.

La identidad étnica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Angel Aguirre Baztan, Doctor en Filosofía i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Josep M. Pou d'Avilés, Doctor en Dret), 1993.

Els laboratoris d'assaig i el mercat interior; Importància i nova concepció (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Mª Simón i Tor, Doctor en Medicina i Cirurgia), 1993.

Contribución al estudio de las Bacteriemias (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Miquel Marí i Tur, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm.Sr. Manuel Subirana i Cantarell, Doctor en Medicina i Cirurgia), 1993.

Realitat i futur del tractament de la hipertròfia benigna de pròstata (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Albert Casellas i Condom, Doctor en Medicina i Cirurgia i President del Col.legi de Metges de Girona), 1994.

La seguridad jurídica en nuestro tiempo. ¿Mito o realidad? (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres), 1994.

La transició demogràfica a Catalunya i a Balears (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Ferrer i Bernard, Doctor en Psicologia), 1994.

L'art d'ensenyar i d'aprendre (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Agustín Luna Serrano, Doctor en Dret), 1995.

Sessió necrològica en record de l'Excm.Sr. Lluís Dolcet i Buxeres, Doctor en Medicina i Cirurgia i Degà emèrit de la Reial Acadèmia de Doctors, que morí el 21 de gener de 1994. Enaltíren la seva personalitat els acadèmics de número Excms.Srs.Drs. Ricard García Vallès, Josep Mª Simón i Tor i Albert Casellas i Condom. 1995.

La Unió Europea com a creació del geni polític d'Europa (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Jordi Garcia-Petit i Pàmies, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques), 1995.

La explosión innovadora de los mercados financieros (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Emilio Soldevilla García, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm.Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret), 1995.

La cultura com a part integrant de l'Olimpisme (Discurs d'ingrés com acadèmic d'honor de l'Excm.Sr. Joan Antoni Samaranch i Torelló, Marquès de Samaranch, i contestació per l'Excm.Sr. Jaume Gil i Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques), 1995.

Medicina i Tecnologia en el context històric (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i LLetres) 1995.

Els sòlids platònics (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma.Sra. Pilar Bayer i Isant, Doctora en Matemàtiques, i contestació per l'Excm.Sr. Ricard Garcia i Vallès, Doctor en Dret) 1996.

La normalització en Bioquímica Clínica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Xavier Fuentes i Arderiu, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm.Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Geografía) 1996.

L'entropia en dos finals de segle (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques, i contestació per l'Excm.Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques) 1996.

Vida i música (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Carles Ballús i Pascual, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Mª Espadaler i Medina, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1996.

La diferencia entre los pueblos (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Sebastià Trías Mercant, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

L'aventura del pensament teològic (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia, i contestació per l'Excm.Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 1996.

El derecho del siglo XXI (Discurs d'ingrés com acadèmic d'honor de l'Excm.Sr.Dr. Rafael Caldera, President de Venezuela, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

L'ordre dels sistemes desordenats (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Josep Mª Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm.Sr. Joan Bassegoda i Nonell, Doctor Arquitecte) 1997.

Un clam per a l'ocupació (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Isidre Fainé i Casas, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm.Sr. Joan Bassegoda i Nonell, Doctor Arquitecte) 1997.

Rosalia de Castro y Jacinto Verdaguer, visión comparada (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Jaime Manuel de Castro Fernández, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

La nueva estrategia internacional para el desarrollo (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Santiago Ripol i Carulla, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

Impressió: Arts Gràfiques Torres, S.A.
Tirada: 500 exemplars.

Dipòsit legal: B-26046-98

REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS