



REIAL ACADEMIA DE DOCTORS

Els sòlids platònics

•

Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària electa

Excma. Sra. Pilar Bayer i Isant

Doctora en Matemàtiques

A l'acte de la seva recepció, 23 de gener de 1996, i

discurs de contestació de l'acadèmic de número

Excm. Sr. Ricard Garcia i Vallès

Doctor en Dret

Barcelona

1996

Dra. Pilar Bayer i Isant

Els sòlids platònics

REAL ACADEMIA DE DOCTORS

-Publicacions-

Els sòlids platònics

PILAR BAYER

Excel·lentíssim Senyor Degà-President, senyors i senyores excel·lentíssims membres i il·lustríssims membres de la Reial Acadèmia de Doctors, distingit públic:

Moltes gràcies per la distinció que m'atorguen. Serà un honor per a mi participar d'ara endavant en les tasques que aquesta institució porta a terme.

L'exposició d'avui s'articula com un tema amb variacions sobre els sòlids platònics. El seu propòsit és oferir un apropament informal al quefer matemàtic.

Introducció

L'activitat matemàtica és una constant de totes les civilitzacions; es pot dir que és inherent al pensament humà. D'antuï, intuïm l'aritmètica en el bescanvi de mercaderies i en el desplegament dels exèrcits; percebem la geometria en la partició de terres i per imperatius de l'arquitectura o de la navegació; així mateix, reconeixem l'astrono-

mia en l'elaboració de calendaris i en la mesura del temps. Però, superats aquests aspectes, que podríem dir més pràctics, les matemàtiques presenten, des de les seves al·lors, vessants ben diferenciats: els purament especulatius i els aplicables a desvelar el comportament de l'univers.

Des del punt de vista especulatiu, la matemàtica es nodreix a si mateixa. Cerca els seus principis, determina les seves lleis, i arriba a resultats que romanen inalterables al llarg del temps. Així, l'algoritme d'extracció de l'arrel quadrada té validesa amb independència de les lleis imperants. El teorema de Pitàgores afirma, des de fa quatre mil anys, que *en tot triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels dos catets*: $a^2 = b^2 + c^2$.

La certesa intemporal dels resultats matemàtics imprimeix un caràcter molt peculiar a aquesta ciència. Les veritats matemàtiques, en mantenir-se al marge de modes, creences, i interessos particulars, menen l'esperit cap a una sensació de placidesa i benestar.

Però aquesta imatge s'enterboleix ràpidament en aplicar els models matemàtics a l'estudi de la natura.

De manera més o menys conscient, a cops poètica, totes les civilitzacions han nodrit el sentiment que la natura era modelitzable matemàticament. Això no obstant, l'apropament matemàtic als fenòmens físics sovint fa palesa una complexitat inherent molt més gran que l'esperada. Superat el període de crisi que el fet comporta, l'experiència esdevé esperonadora. L'observació del món es converteix aleshores en una de les fonts més importants per estendre la pròpia base del coneixement matemàtic, en

tant que permet postular principis nous, de difícil accés per a la intuïció pura. En una etapa posterior, els avenços matemàtics tendeixen a procurar una millor comprensió de l'univers.

§1. Antecedents al teorema de Pitàgores

El segle VI aC és un segle de grans místics. Més o menys simultàniament, Zoroastre (660–583 aC), Lao Tse (604–510 aC), Pitàgores (580–500 aC), Confuci (551–479 aC) i Buda (560–477 aC) proposen actituds afavoridores de la reflexió.

Pitàgores, nascut a l'illa grega de Samos, era d'origen fenici. S'establí a Crotona, a la Magna Grècia, on fundà una comunitat filosòfico-religiosa dedicada a l'estudi. Segons Isòcrates, Pitàgores hauria viatjat per Egipte des d'on, presoner dels perses, hauria estat traslladat a Babilònia.

En el temps de Pitàgores, Nabucodonosor II procurava a l'imperi babilònic els seus darrers dies d'esplendor, abans de la seva caiguda definitiva en mans de Ciro. Els Jardins Penjats de Semíramis (809 aC), una de les Set Meravelles, donaren compte del grau de refinament de les cultures mesopotàmiques.

Tant la matemàtica babilònica com l'egípcia assoliren un nivell considerable. La matemàtica babilònica es basava en el sistema sexagesimal sumeri, que encara emprem en les unitats horàries.

Nínive, la capital de l'imperi assiri, havia estat enderrocada el 612 aC pels medes, aliats amb els caldeus. Fundada per Assurbanipal (668–626 aC), la seva biblioteca custodià taules d'argila gravades en escriptura cuneïforme, i només fou superada, en l'antigor, per la biblioteca de papirs d'Alexandria. Un bon nombre de taules persepolitanes que contenen textos matemàtics ha arribat fins als nostres dies.

A penes fa mig segle, O. Neugebauer i A. Sachs desxifraren la taula coneguda amb el nom PLIMPTON 322, que es guarda a la Universitat de Columbia (EUA). Per l'estil amb què està feta, es remunta a l'època d'Hammurabi (~ 1900–1600 aC) i deixa constància d'un exercici intel·lectual pur realitzat quatre mil anys endarrere. La taula presenta, en tres columnes contigües, les dades numèriques de quinze triangles rectangles de costats enters i, per tant, evidencia una familiaritat en el maneig dels triangles rectangles del tot anterior a Pitàgores.

Recordem que, també gravada en taules d'argila, ens arribà la primera epopeia coneguda de la història: el *Poema del Gilgamesh* (s. VIII aC), el relat de l'estrangulador de lleons que estava format, modestament, per dues terceres parts de déu i una tercera part d'home.

En relació amb l'aprenentatge de les proporcions i de propietats arcanes dels nombres, alguns historiadors de la matemàtica, van der Waerden entre ells, esmenten la probable influència que pogueren exercir en Pitàgores els ensenyaments de Zoroastre, el mede. És un fet que en tota la doctrina pitagòrica s'aprecien forts corrents orientals.

§2. L'harmonia de les esferes

El monocord és un dels instruments musicals més senzills. Consta d'una caixa de ressonància sobre la qual es tensa una corda. En ser polsada, la corda vibra i emet un so, el to del qual depèn de la longitud de la corda.

Pitàgores s'adonà que les longituds de la corda que proporcionen una nota, la seva quarta, la seva cinquena, i la seva octava són proporcionals als nombres 12, 9, 8, i 6, o bé, equivalentment, als nombres 1, $3/4$, $2/3$, i $1/2$.

Per aquest motiu, s'anomenen *musicals* les quaternes de nombres en les quals els termes centrals són la mitjana harmònica i la mitjana aritmètica, respectivament, dels termes extrems:

$$a : \frac{2ab}{a+b} :: \frac{a+b}{2} : b.$$

Per exemple, 1, $4/3$, $3/2$, 2 és una quaterna musical.

Mitjançant l'ús d'aquestes proporcions, fou proposada una afinació, dita pitagòrica, de l'escala musical. En l'escala pitagòrica, els intervals successius s'obtenen per superposició de cinquenes naturals. És a dir, de cinquenes ajustades a la fracció $3/2$.

Segons les raons de llurs freqüències, els tons de l'escala pitagòrica es corresponen amb fraccions:

$$1, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{81}{64}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{27}{16}, \quad \frac{243}{128}, \quad 2$$

(*do, re, mi, fa, sol, la, si, do*).

Aquests fets conduïren els pitagòrics a cercar l'ordre i l'harmonia de l'univers en la ciència dels nombres. Per extrapolació, varen imaginar que les distàncies dels astres a la Terra també definien progressions musicals. Els cossos celestes emetien així sons harmoniosos —sols perceptibles pels iniciats— que feien palesa l'*harmonia de les esferes*.

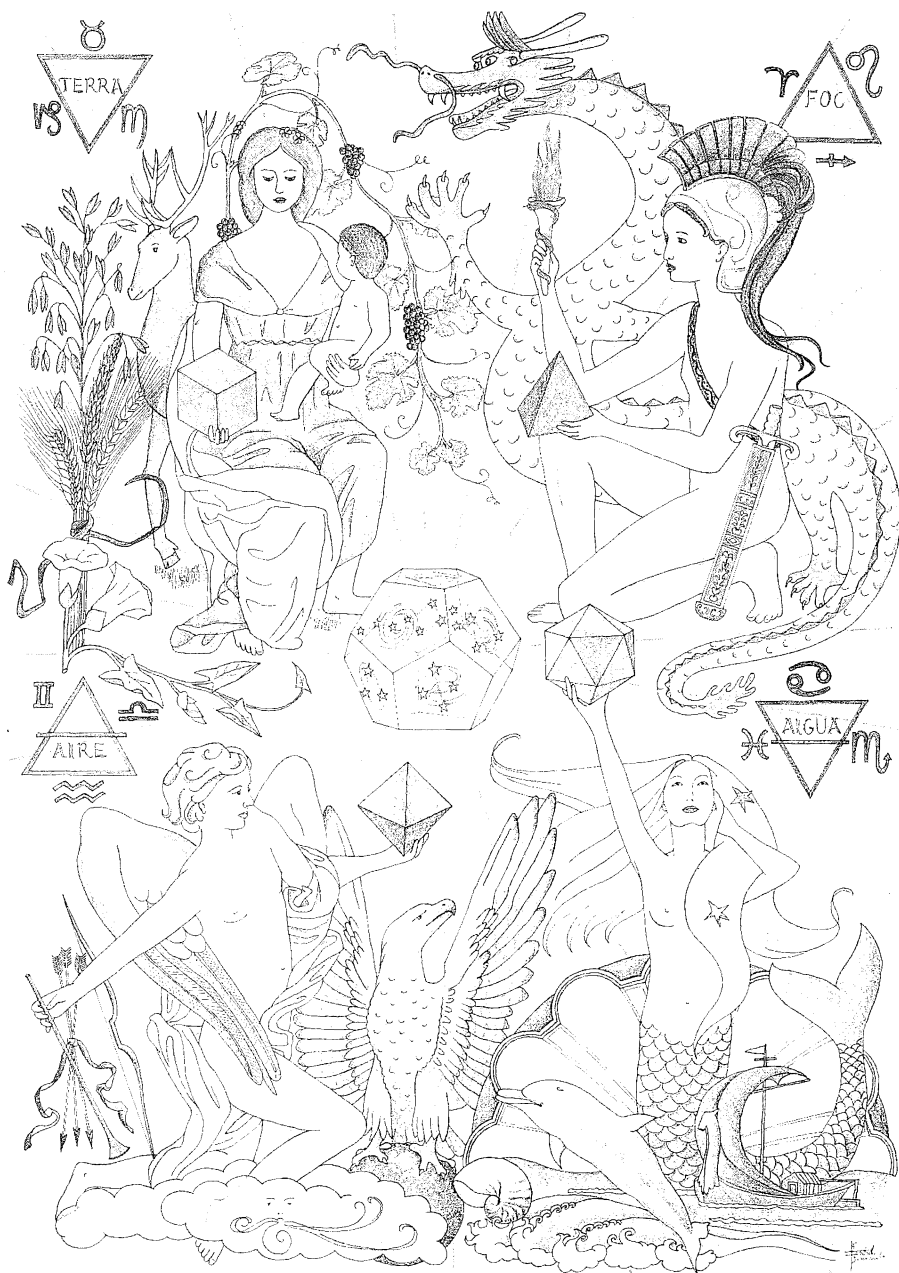
§3. Els sòlids platònics

Plató (427–348 aC) afirma en el *Timeu*, el més pitagòric dels seus diàlegs, que hi ha dos triangles que són més bells i més perfectes que els altres. Es tracta del triangle rectangle en què la hipotenusa és doble d'un catet (escaire), i del triangle rectangle isòsceles (cartabó). Tot seguit precisa com, a partir dels triangles, es confegeixen uns cossos que són els més bells i més perfectes de l'espai:

el tetràedre, l'octàedre, l'icosàedre, l'hexàedre.

El tetràedre té 4 cares, l'integren 24 triangles elementals. L'octàedre té 8 cares, l'integren 48 triangles elementals. L'icosàedre té 20 cares, l'integren 120 triangles elementals. L'hexàedre o cub té 6 cares, l'integren 48 triangles rectangles isòsceles elementals.

Plató esmenta una cinquena combinació possible, que correspon al *dodecàedre*. El dodecàedre té 12 cares, pentàgons regulars. En relació amb els anteriors és estrany, en tant que l'integren 120 triangles rectangles que són escalens.



Al·legoria sobre els sòlids platònics, 1996. Maria Isabel Binimelis

Per boca de Timeu, Plató utilitza els cossos anteriors per explicar la constitució dels quatre elements pre-socràtics:

terra, aigua, aire, foc.

Ateses llurs característiques de mobilitat i lleugeresa, raona que el cub és el constituent de la terra; l'icosàedre, el de l'aigua; l'octàedre, el de l'aire; i el tetràedre, el del foc.

Com sigui que li resta encara el dodecàedre, al qual no ha pogut assignar cap element, Plató ens diu que el Demiürg se'n serví per al cosmos en la seva disposició final. El dodecàedre és el constituent de l'èter, de la *quinta essència*.

Segons Plató, els sòlids esmentats intervenen en la disposició del cos del món; les quaternes musicals, en la de l'ànima; i el món es forma *per l'acció de la necessitat unida a la força colpidora de la saviesa*.

Al llarg dels segles, la cosmologia de Plató ha donat lloc a tota mena de reflexions i d'interpretacions —més o menys confessades, més o menys amagades— i ha exercit una notable influència tant en l'estudi del macrocosmos com del microcosmos.

En el primer període de l'escola alexandrina, Euclides (s. IV–III aC), professor del *Museu*, escriu els *Elements*. L'obra proporciona un compendi del saber geomètric aristotèlico-platònic del seu temps. El capítol XIII i darrer està dedicat a l'estudi dels sòlids platònics. L'autor els inscriu en una esfera i, amb una habilitat extraordinària, en calcula les arestes a partir del radi. Els *Elements* conclouen amb la prova que els cinc sòlids platònics són la totalitat dels políedres regulars convexos.

Actualment, i transcorreguts més de vint segles, els estudiants de matemàtiques continuen aprenent que el nombre de políedres regulars convexos de l'espai euclidià és igual a cinc, d'acord amb els *Elements*.

En canvi, sembla que la descripció física del món ha sofert algunes variacions des de l'antigor. Ja no parlem del cos del món, sinó que ho fem de partícules de matèria. En els anys seixanta, Murray Gell-Mann conjecturà que les partícules nuclears pesades (hadrons) que constitueixen la matèria podrien estar integrades per quarks, partícules elementals repartides en cinc (sis) tipus: *up and down, strange and charm, (top) and bottom*; i tres colors: *vermell, blanc i blau*. Tampoc no parlem de l'ànima del món, sinó que ho fem de classes d'interaccions: la gravitacional, l'electromagnètica, la nuclear dèbil i la nuclear forta. Molt menys parlem de l'èter o de la quinta essència; de fet, Edward Witten suggerí, en els anys vuitanta, que la matèria fosca de l'univers observable podria estar constituïda per quarks estranys. Però no ens precipitem, perquè afirmacions com aquestes descansen en processos experimentals i conceptes matemàtics sofisticats, d'alguns dels quals parlarem més endavant.

§4. *Al-jabr wa'l muqābala*

En la segona meitat del segle VIII i en el segle IX, tres califes: al-Mansūr, Hārūn al-Rašīd, i al-Ma'mūn, convertiren Bagdad en el centre cultural més important del seu temps. La *Casa de la Saviesa*, fundada per al-Ma'mūn, acollia estudiants d'arreu del món, jueus inclosos.

Cal agrair als àrabs la preservació d'una part important del patrimoni matemàtic de l'antiguitat. Sota el regnat de Hārūn al-Rašīd, el califa de *Les mil i una nits*, s'inicia la traducció a l'àrab dels *Elements* d'Euclides i, en el d'al-Ma'mūn, la de l'*Almagest* de Ptolemeu.

Així mateix, l'*Aritmètica* de Diofant d'Alexandria, obra comentada per Hipàtia en el segle IV, és traduïda a l'àrab per Qustā ibn Lūqā i, tot seguit, és estudiada per al-Karkhī, en el segle X. Notem que no és fins al segle XVII que Occident s'aplica, de la mà de Pierre de Fermat (1601–1665), a l'estudi d'aquesta obra singular.

En llurs treballs científics, els àrabs optaren pel sistema indi de numeració, completant-ne les nou xifres amb la xifra zero. Al-Huwārizmī (~ 850), matemàtic i astrònom de la *Casa de la Saviesa*, exposà en un llibre les regles necessàries per operar de manera posicional amb el sistema de numeració que en resulta. En comparació amb els sistemes grec o romà, tan rígids a l'hora de realitzar les operacions aritmètiques més elementals, els avantatges del sistema indo-aràbic són patents. De Bagdad, el sistema indo-aràbic es transferí cap a al-Andalus, i aquesta va ser una de les vies per les quals es difongué per tot l'Occident.

La versió original del llibre esmentat d'al-Huwārizmī resta perduda. Sortosament, però, se n'ha conservat una versió llatina, *Liber Algorismi de numero indorum*, realitzada a l'Escola de Traductors de Toledo. De les regles de càlcul d'al-Huwārizmī deriva la paraula *algoritme*.

En un altre text, titulat *Al-jabr wa'l muqābalah*, al-Huwārizmī estudià les equacions algebraïques, en una

incògnita, de primer i segon grau. Del títol d'aquesta obra deriva la paraula *àlgebra*.

§5. *Liber abaci*

Fibonacci (~ 1180–1250, fill de Bonacci), conegut també per Leonardo da Pisa, és una figura representativa de la matemàtica medieval. Fill d'un mercader, els seus nombrosos viatges el posaren en contacte amb els coneixements matemàtics del món islàmic. El 1202, Fibonacci escriví el *Liber abaci*, un text dedicat a la pràctica del càlcul amb el sistema indo-aràbic. El *Liber abaci* conegué una difusió lenta, la qual cosa és natural si pensem que es tracta d'un compendi que té 459 pàgines i que és anterior a la impremta.

Durant molts anys, les persones versades en el càlcul gaudiren d'una aurèola considerable. Per exemple, en l'*Otel·lo* de Shakespeare trobem que el personatge de Càssio és enaltit tot dient que es tracta d'un *aritmètic* florentí que ho ha après tot en els llibres. Otel·lo, sensible a semblants virtuts, nomena Càssio lloctinent de la seva guàrdia. El fet desespera Iago, que es té per més versat en les arts militars. Iago, ressentit, tramará una venjança terrible contra el Moro.

En el *Liber abaci*, Fibonacci planteja diversos problemes. En un (*paria cuniculorum*) es demana el nombre de parelles de conills que s'obtindria en el decurs d'un any a partir d'una hipotètica parella reproductora. Se suposa que les parelles joves no inicien la reproducció fins al cap

d'un mes; que després, cada mes, cada parella produeix una nova parella (mascle i femella); i que, durant l'any, no es mor cap dels conills.

Al bell mig de les precisions, Fibonacci remarca que els conills es troben en un tancat (per tant, no poden escapar-se) i compta, tot seguit, el nombre de parelles en finalitzar els diferents mesos:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233.

Cadascun d'aquests nombres és igual a la suma dels dos que el precedeixen. En prosseguir indefinidament segons aquesta llei, s'obté l'anomenada successió de Fibonacci.

Crida l'atenció la presència insistent, en la natura, de la successió de Fibonacci. El nombre de pètals en les flors, o d'espitals en les pinyes, sovint ve donat per termes d'aquesta successió. Per exemple, gairebé totes les margarides tenen 21, 34, 55 o bé 89 pètals. Els nombres de la successió de Fibonacci intervenen, també, en el període d'arranjament de les fulles en els troncs de molts arbres: de 3 en els oms, de 5 en els cirerers, de 8 en les pereres, etc.

§6. El nombre auri

La successió de Fibonacci està relacionada estretament amb l'anomenat *nombre auri*:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398874989 \dots$$

La *secció àuria* d'un segment s'obté en dividir-lo en raó extrema i mitjana. El quocient (> 1) entre les dues parts que en resulten és el nombre auri. Correspon a l'arrel positiva de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$.

El quocient de dos termes consecutius de la successió de Fibonacci tendeix cap al nombre auri. Vegem-ho,

$$\begin{array}{ll} 13/8 & = 1.625, \\ 21/13 & = 1.615384615 \dots, \\ 34/21 & = 1.619047619 \dots, \\ & \dots \\ 832040/514229 & = 1.61803398874820 \dots, \\ & \dots \end{array}$$

Durant segles, trobem present aquest nombre en tots els intents de reduir la bellesa a una fórmula matemàtica concreta.

En els homes perfectament proporcionats —segons els cànons grecs— el melic determina la secció àuria de la seva altura. Així ho mostren els dibuixos d'Albrecht Dürer (1471–1528) i els de Leonardo da Vinci (1452–1519) sobre les proporcions canòniques del cos humà.

En els rectangles auri, la raó entre el costat gran i el costat petit és el nombre auri. Es reconeixen rectangles auri en moltes de les edificacions clàssiques, i també en la disposició de grups escultòrics o pintòrics. El frontispici del Partenó d'Atenes, per exemple, s'inscriu en un rectangle auri.

El quadre *El Darrer Sopar* de Salvador Dalí és un rectangle auri, ja que mesura 167×268 cm². El quadre

desprèn una flaire matemàtica, perquè l'escena se situa dins d'un gran dodecàedre, el políedre representatiu del cosmos.

En els nostres dies, trobem la forma del rectangle auri en dimensions estandarditzades d'objectes ben diversos. Correspon a la forma de molts llibres, i és el format que s'ha adoptat en les targetes de crèdit.

Tanmateix, el nombre auri intervé en la construcció amb regle i compàs del pentàgon i del decàgon regulars, i en les proporcions que guarden entre si els sòlids platònics. Aquests fets es troben en els *Elements*.

§7. *Mysterium cosmographicum*

Johannes Kepler (1571–1630) coneixia bé la geometria euclidiana. En un dels seus textos primerencs, *Mysterium Cosmographicum*, proposà un model per al sistema solar basat en la propietat dels sòlids platònics de poder-se inscriure l'un dintre de l'altre. En aquest model, les òrbites dels planetes coneguts aleshores (Mercuri, Venus, la Terra, Mart, Júpiter i Saturn) s'inscrivien i circumscrivien, alternativament, en un octàedre, un icosaèdre, un dodecàedre, un tetràedre i un cub.

El 1600, Kepler es trasllada a Praga com a ajudant de l'astrònom Tycho Brahe, el qual havia recopilat multitud d'efemèrides al llarg de la seva vida. Un any després de l'arribada de Kepler, morí Tycho Brahe, i Kepler fou nomenat “matemàtic imperial” per Rodolf II. Les seves

tasques com a astrònom de la Cort li deixaven força temps lliure i, en voler contrastar la seva teoria amb les dades del seu predecessor, Kepler trobà grans discrepàncies, especialment en el càlcul de l'òrbita de Mart. Aquestes discrepàncies el conduïren a revisar el seu model cosmogràfic, i a concloure que les òrbites dels planetes eren el·lipses en les quals el Sol ocupava un dels focus.

Notem que Kepler parteix de la teoria heliocèntrica promoguda per Nicolaus Copèrnic (1473-1543) uns quants anys abans. Però, mentre que per a Copèrnic les òrbites dels planetes són circulars, per a Kepler són el·líptiques, una mica més a prop del pensament actual.

Amb Kepler, les seccions còniques entren a formar part del corpus de l'astronomia, en aquest cas, segles després que Apol·loni de Pèrgam (260-200 aC) les hagués estudiades com a objectes purament matemàtics.

En la història de la ciència, l'experiència de Kepler és destacable en tant que il·lustra la manera diferent de procedir dels mons científics clàssic i modern. Els antics raonaven per analogies. A partir del segle XVII, caldrà que les teories científiques se sostinguin per mitjà de l'experimentació.

Per explicar el moviment dels planetes, Kepler formulà tres lleis fenomenològiques. La primera, ja mencionada, fixa la forma de les òrbites; la segona es refereix a la velocitat amb què els planetes les recorren; i la tercera, a la distància mitjana entre un planeta i el Sol.

L'estudi de les diferents manifestacions del moviment fascinà d'altres científics de l'època. La tradició sol presentar-nos Galileo Galilei (1564-1642) deixant caure

esferes des del capdamunt de la Torre de Pisa per estudiar-ne el moviment. Galileo fou dels primers a postular que els cossos cauen amb moviment uniformement accelerat.

§8. *Principia mathematica*

El desig de voler comprendre les lleis de Kepler i la llei de la caiguda dels cossos portà Isaac Newton (1642–1727) a la formulació de la llei de la gravitació universal. En els *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, publicats el 1686, Newton exposà, a més de l'esmentada, les lleis principals que regeixen el moviment: el principi d'inèrcia, el principi fonamental de la dinàmica, i el principi de l'acció i la reacció.

Els biògrafs de Newton deixen constància que patí un esgotament nerviós després de la publicació dels *Principia*. Amb més o menys intensitat, aquesta és una reacció prou coneguda per les persones sotmeses durant un període llarg a una activitat creadora.

Per portar a terme els seus càlculs, Newton creà un mètode que anomenà de les *fluxions*; es tractava del càlcul diferencial, i del seu invers, el càlcul integral.

El desenvolupament immediat del càlcul diferencial i integral fou molt espectacular, tant des del punt de vista teòric com des del punt de vista pràctic. Estudis d'elasticitat, petites oscil·lacions, moviments de sòlids i hidrodinàmica en posaren de manifest la potència; però també, com veurem, les limitacions.

Els *Principia* de Newton, ampliat posteriorment per l'obra de Joseph Louis Lagrange (1736–1813), de Pierre Simon, marquès de Laplace (1749–1827), de William Rowan Hamilton (1805–1865), de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) i de Denis Poisson (1781–1840), semblaren suficients per al tractament de problemes físics durant un període de més de dos-cents anys; és a dir, fins que el pensament humà s'enfrontà a un altre gran repte: conèixer el moviment de les partícules a l'interior dels àtoms.

§9. La corda vibrant

L'estudi de la corda vibrant iniciat per Pitàgores en el monocord fou reprès per Brook Taylor (1685–1731) des del punt de vista de la mecànica newtoniana. El 1715, en els *Methodus incrementorum directa et inversa*, Taylor plantejà el problema de la determinació del moviment d'una corda d'extrems fixos, elàstica i flexible, que es desplaça inicialment sobre un pla i es deixa anar lliurement. Com a solució del problema proposà un moviment sinusoidal:

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \sin\left(a\frac{\pi}{\ell}t\right),$$

que depèn d'una constant, $a^2 = T/\rho$, determinada per la densitat lineal, ρ , de la corda i per la tensió, T , en cada punt. La longitud, ℓ , de la corda dóna el to fonamental.

L'equació que regeix el moviment de la corda fou escrita trenta anys després per Jean le Rond d'Alembert (1717–1783):

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} .$$

Es tracta d'una equació en derivades parcials de segon ordre i de tipus hiperbòlic. Tradueix el fet, observat per Taylor, que l'acceleració normal i la curvatura són proporcionals en deformacions petites.

Jean Bernoulli (1667–1748) i el seu fill Daniel, el propi d'Alembert, i Leonhard Euler (1707–1783) s'ocuparen extensament del problema de la corda vibrant i arribaren a conclusions diferents sobre la natura de les seves solucions.

S'adonaren que la solució de Taylor era solament aproximada, ja que només tenia en compte el so fonamental. Però, a més d'aquest, calia prendre en consideració els diferents harmònics emesos en la vibració de la corda. D'acord amb això, Daniel Bernoulli (1700–1782) proposà solucions $y = y(x, t)$, donades per superposició de moviments sinusoidals:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \left(\frac{\pi n}{\ell} x \right) \sin \left(\frac{a \pi n}{\ell} t + \varphi_n \right) .$$

Aquestes solucions tradueixen millor el fenomen físic, ja que reflecteixen les lleis elementals de l'acústica. Cada

terme de la suma correspon a un harmònic. Tant les fases corresponents, φ_n , com les amplituds, c_n , provenen de la configuració inicial de la corda:

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sin \varphi_n,$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{a\pi n}{\ell} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \cos \varphi_n.$$

La proposta de Daniel Bernoulli plantejava dos problemes seriosos: el de la caracterització de les funcions desenvolupables en sèries trigonomètriques, i el del càlcul de les amplituds dels diferents harmònics.

§10. *Théorie analytique de la chaleur*

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) formà part dels 165 savis que acompanyaren Napoleó en l'expedició a Egipte, el 1798. L'expedició constava d'una flota de 328 vaixells i d'un exèrcit de 38.000 homes. Fourier fou nomenat secretari general de l'*Institut de l'Egypte*, al Caire.

Mentre les tropes napoleòniques lluitaven contra la flota de Nelson, contra els siris, els turcs i els mamelucs, l'*Institut de l'Egypte* emprengué importants estudis d'arqueologia, història natural i sociologia. Un fet destacable de l'expedició és la descoberta de la pedra Rosetta.

De retorn a França, Fourier fou nomenat prefecte del departament d'Isère. Al mateix temps que participava

en nombrosos projectes d'enginyeria destinats a recompondre el país després de la Revolució, inicià les seves recerques sobre la propagació de la calor en els cossos sòlids. Establí que aquest fenomen es regeix per una equació en derivades parcials de segon ordre, de tipus parabòlic.

El 21 de desembre de 1807, Fourier llegia a l'*Académie des Sciences* de París la seva memòria sobre la propagació de la calor i, el 1822, publicava l'obra *Théorie analytique de la chaleur*, sobre el mateix tema. Ambdós treballs ensopegaven, com en el cas del de les cordes vibrants, amb el problema de la representació de funcions per sèries trigonomètriques. Un cop més, posaven en evidència la imprecisió del llenguatge d'aquell moment per al tractament dels problemes del càlcul infinitesimal.

El treballs de Fourier, prosseguits per Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) i per Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805–1859), desembocaren en un procés de fer més rigorosa l'anàlisi matemàtica, procés que s'estendria a bona part del segle XIX. Fou necessària la precisió de conceptes com el de límit, funció, convergència, i convergència uniforme abans que la teoria subjacent a l'anàlisi de Fourier quedés establerta sòlidament. Precisament les reflexions sobre la unicitat de les representacions de les funcions en sèries trigonomètriques portaren Georg Cantor (1845–1918) a establir les bases de la seva teoria de conjunts. Aproximadament cent anys després, les beceroles d'aquesta teoria arribaven a les escoles amb el nom, ben poc escaient, de *matemàtica moderna*.

Avui, l'anàlisi de Fourier és present en l'estudi de tots els fenòmens de natura periòdica. És la base matemàtica dels espectròmetres, emprats en l'anàlisi química

i en astrofísica. La trobem en l'eliminació de sorolls en la música enregistrada per procediments digitals, en la confecció de mapes, etc. La combinació de tècniques de difracció de raigs X amb l'anàlisi de Fourier serveix, en medicina i biologia, per descobrir estructures complexes, com poden ser les dels virus, o les de l'hèlix doble de l'ADN.

Cada cop es computen transformades de Fourier més acurades de funcions obtingudes a partir d'un nombre ingent de dades experimentals.

Podem dir que els resultats d'intenses recerques matemàtiques i continus avenços tècnics permeten a l'intel·lecte humà realitzar allò que, en freqüències baixes, la seva oïda és capaç de fer espontàniament: el càlcul de transformades de Fourier. D'acord amb això, captar l'harmonia de les esferes, avui, ja no és quelcom privatiu dels iniciats.

§11. Simetries

El concepte matemàtic de grup és un dels més naturals i a la vegada sofisticats. El trobem en la base de l'àlgebra, l'aritmètica, la geometria, i també de la física i la química quàntiques. Els grups són l'expressió matemàtica del pensament de Sophie Germain (1771–1859) segons la qual *l'àlgebra no és altra cosa que una geometria que s'escriu i la geometria no és altra cosa que una àlgebra que es dibuixa*.

Els grups apareixen íntimament lligats al concepte de simetria. Els objectes prou simètrics porten associat un grup, format pels moviments que els deixen invariants. Per exemple, un pentàgon regular és invariant per un grup de 10 moviments.

Els sòlids platònics presenten multitud de simetries. Donat un sòlid platònic, el podem fer girar sobre si mateix i prendre en consideració les rotacions que en resulten. En trobem 12 en el cas del tetràedre; 24 en el cas del cub i de l'octàedre; 60 en el cas de l'icosàedre i del dodecàedre. Els grups corresponents es designen per A_4 , S_4 i A_5 , respectivament.

Un exercici similar, una mica més complicat, consistiria a cercar els grups de simetries dels mosaics tesel·lats de l'Alhambra, o bé dels cristalls. Trobaríem 17 grups en el primer cas i 230 en el segon.

Des del punt de vista abstracte, cal cercar els antecedents de la teoria de grups en l'obra de Carl Friedrich Gauss (1777–1855). En les *Disquisitiones arithmeticae*, publicades l'any 1801 sota l'advocació del príncep Carolus Guilielmus Ferdinandus, Gauss emprèn l'estudi de les formes quadràtiques, de la llei de reciprocitat quadràtica, i dels polígons regulars construïbles amb regla i compàs, per mitjà d'uns recursos que equivalen al maneig implícit del que seria, poc després, el formalisme de la teoria de grups.

En el Renaixement, Nicolo Fontana Tartaglia (1500–1557), Girolamo Cardano (1501–1576) i Ludovico Ferrari (1522–1565), en prosseguir les recerques d'al-Hu-wārizmī sobre la resolució de les equacions, havien obtin-

gut fórmules amb radicals per resoldre les equacions de grau més petit o igual que 4. Des d'aleshores, s'havien estat cercant, sense trobar-les, fórmules similars per a la resolució de les equacions de grau superior.

Évariste Galois (1811–1832), un estudiant de l'*École normal supérieure* que en fou expulsat per les seves idees republicanes, posà de manifest que el grau de complexitat d'una equació algebraica es pot remetre al d'un grup, obtingut en tenir presents les simetries que presenta el conjunt de les seves arrels. Galois, el 1830, féu patent que l'existència de les fórmules per resoldre les equacions fins a grau 4 és deguda a propietats de trencament dels grups del tetràedre, A_4 , i de l'octàedre, S_4 . A la vegada, propietats relatives al no-trencament del grup de l'icosàedre, A_5 , impedeixen la resolució de manera semblant de les equacions de grau cinquè o superior. Els treballs de Galois feien palès que durant més de tres-cents anys s'havien estat cercant, endebades, unes fórmules matemàtiques inexistents.

Resultats semblants als de Galois, però en el marc de les equacions diferencials, foren obtinguts posteriorment per Marius Sophus Lie (1842–1899). Les recerques de Lie conduïren a l'estudi dels grups continus de transformacions.

Els grups A_4 , S_4 , A_5 , de les rotacions dels sòlids platònics, es *representen* com a subgrups finits d'un grup de Lie, l'especial ortogonal $SO(3)$, format per totes les rotacions de l'espai euclidià. El fet que únicament existeixen cinc sòlids platònics es recupera a partir de propietats intrínseques d'aquest grup.

A partir de la segona meitat del segle XIX, la noció de grup s'imposa en el discurs matemàtic, al mateix temps que hi afavoreix un raonament molt més estructural.

§12. L'àtom d'hidrogen

En les darreres dècades del segle XIX i les primeres del XX, el paper de les acadèmies com a centres impulsors del saber es veu enriquit pel de determinades universitats, capdavanteres en la recerca científica. Matemàtics i físics, encara no ben diferenciats, solen treballar en un mateix entorn, la qual cosa propicia un intercanvi intens de corrents de pensament. Són aquests els anys daurats de les universitats de Göttingen, Königsberg, Erlangen, Berlín, de l'*École polytechnique* de Zurich, i dels *Colleges* d'Oxford i de Cambridge. Tanmateix, es funden a l'època la *London Mathematical Society*, la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, l'*American Mathematical Society* i el *Centre National de la Recherche Scientifique*.

Les geometries no euclidianes entren en escena i comporten el naixement de la teoria de la relativitat. El 1918, Emmy Noether (1882–1935) estableix el principi general que connecta els grups de simetries amb lleis conservatives. Tècniques de representació de grups, bàsicament degudes a Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) i al seu deixeble Issai Schur (1875–1941), juguen un paper, aclaridor primer i decisiu després, en el desenvolupament de la teoria de nombres i en el naixement de la mecànica quàntica.

Entre la Primera i la Segona Guerra Mundial, es produeix una forta emigració de científics cap als Estats Units. En els anys 30 i 40, són acollits a Princeton, Harvard, Chicago, i d'altres centres americans, matemàtics de la talla de Solomon Lefschetz, Issai Schur, Emmy Noether, Hermann Weyl (1885–1955), Emil Artin (1898–1962) i Carl Ludwig Siegel. Igualment, ho són els físics Albert Einstein (1879–1955), Niels Hendrik David Bohr (1885–1962), Wolfgang Pauli (1900–1958), Eugen Paul Wigner (1902–1995), Enrico Fermi (1901–1954) i Johann von Neumann (1903–1957).

El 1939, Wigner determinà les representacions del grup de Poincaré, que és el grup dels moviments de l'espai-temps de la teoria de la relativitat. Representacions irreductibles d'aquest grup permeten retrobar la classificació experimental de les partícules detectades a l'època, en tenir en compte la seva massa i el seu spin. Massa i spin es llegeixen a partir de dos operadors de Casimir.

En el model no relativista de l'àtom d'hidrogen (un únic electró sotmès al camp central de Coulomb creat pel nucli), l'espectre discret de l'operador de Schrödinger determina els nivells d'energia de l'electró. Els estats estacionaris d'un nivell donat constitueixen un espai de Hilbert en el qual opera el grup especial ortogonal $\mathbf{SO}(3)$. Els estats s'expressen per mitjà de desenvolupaments de Fourier, i es caracteritzen per tres constants: nivell, nombre quàntic azimutal i nombre quàntic magnètic. Representacions irreductibles del grup $\mathbf{SO}(3)$ descriuen els estats amb el mateix nombre quàntic azimutal.

Representacions irreductibles dels grups de Lie especials unitaris, $\mathbf{SU}(n)$, són utilitzades per descriure els

estats de noves partícules elementals, o bé per conjecturar-ne l'existència.

En l'estudi dels hadrons (protó i neutró, per exemple), $SU(2)$ dóna compte de l'isospín, $SU(3)$ hi afegeix l'estranyesa, $SU(4)$ l'encant, etc. Invariants discrets associats a representacions irreductibles de $SU(2) \times SU(3)$, $SU(6)$, i d'altres grups, proporcionen nombres quàntics associats als estats dels quarks.

En aquest context, podem pensar que Plató cercava la constitució del món per mitjà del grup especial ortogonal. Les teories unificades ho intenten mijançant els grups especials unitaris, o bé altres grups de Lie, prou complicats.

Cal, però, no perdre de vista que un grup de Lie és un ens matemàtic. En conseqüència, només l'experimentació i la inferència estadística poden dir-nos en quin grau les seves representacions provenen de la natura.

§13. *Jugendtraum*

En el Congrés Internacional de Matemàtiques celebrat a París l'any 1900, David Hilbert (1862–1943) glossà vint-i-tres problemes oberts, que han tingut un pes específic considerable en la recerca matemàtica del nostre segle.

El problema 12 proposat per Hilbert es coneix amb noms diversos: somni de joventut (*Jugendtraum*) de Kronecker, filosofia de Langlands, teoria de la unificació, etc. Té com a precedents el problema de la resolució de les

equacions (Galois), i problemes tractats per Gauss (lleis de reciprocitat), Bernhard Riemann (1826–1866) (funció zeta) i Henri Poincaré (1854–1912) (uniformització de varietats).

Expressat breument, el problema 12 de Hilbert requereix la comprensió, analítica i aritmètica, de les solucions de les equacions algebraïques en una incògnita definides sobre els racionals. Gràcies a Teiji Takagi (1875–1960), el cas abelià és conegut de temps.

En els darrers anys s’ha produït un avenç considerable en la resolució del problema 12 de Hilbert, en tant que avui comprenem força bé les equacions de tipus A_4 , S_4 , A_5 , és a dir, les equacions tals que el seu grup de Galois es projecta, precisament, en el grup de rotacions d’un sòlid platònic.

El problema 12 de Hilbert comporta l’estudi de les representacions dels grups de Galois de les equacions. Aquestes estableixen el pont entre les propietats aritmètiques i la natura analítica de les solucions. Representacions irreductibles (en dimensió 2) de grups de Galois porten associats desenvolupaments de Fourier i invariants discrets: el nivell, el pes i el caràcter. Treballs profunds, de Jean-Pierre Serre, Barry Mazur i Kenn A. Ribet, entre altres, permeten detectar les representacions de Galois que provenen de la *natura*. En altres paraules, és com si les solucions de certes equacions vibressin.

§14. Un resultat actual

Una part important de la producció matemàtica dels darrers cinquanta anys s'ha orquestrat en grans centres dedicats a la recerca, com són l'*Institut for Advanced Study* a Princeton, l'*Institut des Hautes Études Scientifiques* i el *Collège de France* a París, el *Max Planck Institut* a Bonn, i l'*Steklov Mathematical Institute* a Moscou.

En l'actualitat, i cada cop més, matemàtics i matemàtiques d'una mateixa àrea tendeixen a treballar en projectes comuns, amb independència del seu país de residència. Des d'universitats, centres de recerca i laboratoris tecnològics, llurs descobertes es propaguen a la velocitat de la llum, vibrant per les autopistes de la informació. El nombre, creixent, de publicacions especialitzades arriba a produir un cert vertigen. Tot plegat fa que trobem més persones matemàtiques en l'actualitat que en la resta de la història de la humanitat.

Un punt de mira de la recerca d'avui el proporciona la resposta, parcial, donada al problema 12 de Hilbert. Aquesta resposta basta per cloure un problema mític, que plantejà Pierre de Fermat fa més de tres-cents anys.

Amb càlculs senzills, o bé per la simple observació de la taula d'argila PLIMPTON 322, ens adonem de l'existència de quadrats que es trenquen en suma de dos quadrats. Per exemple, $25 = 9 + 16$. L'equació pitagòrica $a^2 = b^2 + c^2$ té, per tant, solucions en els nombres enters no nuls. En canvi, l'any 1637, Pierre de Fermat afirmà que l'equació $a^n = b^n + c^n$ no té solucions en els enters no nuls quan n és més gran o igual que 3. És a dir, que cap cub no pot trencar-se en suma de dos cubs, ni cap

altra potència superior al quadrat no pot fer-ho en suma de dues potències del mateix ordre.

El 1986, Gerhard Frey s'adonà que si l'equació de Fermat tingués una solució, aquesta donaria lloc, a la vegada, a una equació algebraica molt anòmala, en una incògnita. Una representació de dimensió 2 del seu grup de Galois produiria, en un cert moment, un desenvolupament de Fourier amb totes les amplituds nul·les. És a dir, les solucions d'aquesta equació auxiliar no vibrarien. Atès, com sosté Andrew Wiles (1995), que la representació en qüestió prové de la *natura*, arribem a una contradicció. Fermat té raó. Un objecte així no pot tenir lloc en el món, harmònic, concebut pel Demiürg.

Cloenda

En cloure, voldria fer palès el meu agraïment a les persones del Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona per la seva dedicació durant tots aquests anys, durs, de camí conjunt. Al Dr. Josep Pla i Carrera, al Dr. Artur Travesa i Grau, a Mercè Otero i Vidal, M. Teresa Sucarrats i Pous, i a M. Isabel Binimelis i Bassa, per l'inestimable suport que m'han donat en aquesta ocasió. A la DGICYT. Als departaments de matemàtiques que han fet agradable el meu treball. A l'alumnat. A la mare i al Marcel·lí.

Però especialment a vostès, per la seva disponibilitat a escoltar-me, perquè, en més de vint-i-cinc anys de professió, és la primera vegada que un públic no matemàtic ha volgut que li parlés de matemàtiques!

Bibliografia

ANÒNIM: *Poema de Gilgamesh. Bhagavad-Gita*, Jorge Luis Borges. Biblioteca personal, Ediciones Orbis, Barcelona, 1986.

ARENAS, A.: Sums of three squares, from Gauss to modular forms, en el llibre *Symposia Gaussiana, Conference*, Behara; Fritsch; Lintz, ed., Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1995.

ARTIN, M.: *Algebra*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993. Obra original: 1991.

AUTORS DIVERSOS: *Científicos Griegos I-II*, Aguilar ediciones, Madrid, 1970.

—————: *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1976.

—————: *Historia de la matemática en los siglos XVII y XVIII*, Historia de la Ciencia, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1988.

-
- _____: *Historia de la matemática en el siglo XIX*, Historia de la Ciencia, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1994.
- BALL, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1960. Obra original: 1893.
- BAYER, P.; FREY, G.: Galois representations of octahedral type and 2-coverings of elliptic curves, *Mathematische Zeitschrift* **207** (1991), 395–408.
- BOTTAZZINI, U.: *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.
- BOYER, C. B.: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968.
- BRÖCKER, T.: *Partielle Differential Gleichungen*, Der regensburger Trichter, Universität Regensburg, Regensburg, 1975.
- CASTELLET, M. (ed.): *El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX*, Arxius de la Secció de Ciències, LXXV, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 1984.
- CERAM, C. W.: *Déus, tombes i savis*, Llibres a mà, Edicions Destino i Edicions 62, Barcelona, 1986. Obra original: 1949.
- COHEN, B. I.: *El nacimiento de una nueva física*, Alianza Universidad, Alianza Editorial, Madrid, 1989. Obra original: 1960.

- COMALADA, S.; NART, E.: Modular invariant and good reduction of elliptic curves, *Mathematische Annalen* **293** (1992), 331–342.
- COMAS, M.: *Breve historia de la humanidad* I, II, Ediciones Sócrates, Barcelona, 1957.
- CONFUCI: *Diàlegs de Confuci*, Edicions Aquari, Barcelona, 1983.
- CRAWFORD, H. J.; GREINER, C. H.: En busca de la materia extraña, *Investigación y Ciencia* **210** (1994), 58–64.
- CRESPO, T.: Explicit solutions to embedding problems associated to orthogonal Galois representations, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **409** (1990), 180–189.
- DEAKIN, M. A. B.: Hypatia and Her Mathematics, *American Mathematical Monthly* **101** (1994), 234–243.
- DIAMOND, F.: The refined conjecture of Serre. Pre-publicació (1994).
- DIEUDONNÉ, J.: *Abrégé d'histoire des mathématiques* I, II, Hermann, París, 1978.
- EINSTEIN, A.: *The principle of relativity*, Dover Publications, Inc., New York, 1952.
- FERNÁNDEZ-RANADA, A. (ed.): *Orden y Caos*, Libros de Investigación y Ciencia. Scientific American, Prensa Científica, 1990.

- FREY, G.: Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations, *Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicæ* **1** (1986), 1–40.
- GAUSS, C. F.: *Disquisitiones arithmeticae*, Culture et Civilisation, Bruxelles, 1968. Obra original: 1801.
- GELBART, S. S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, 1975.
- GELL-MANN, M.: *El quark y el jaguar*, Metatemas, Tusquets Editores, Barcelona, 1995.
- GEORGI, H.: *Lie Algebras in Particle Physics*, Frontiers in Physics, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1982.
- GHYKA, M. C.: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Editorial Poseidón, Barcelona, 1977. Obra original: 1953.
- GILLISPIE, C. C.: Ciencia en la campaña egipcia de Napoleón, *Investigación y Ciencia* **218** (1994), 64–71.
- GOBRY, I.: *Pythagore*, Philosophes de tous les temps, Éditions Seghers, París, 1973.
- GONZÁLEZ ROVIRA, J.: Equations of hyperelliptic modular curves, *Annales Institut Fourier* **41** (1991), 779–795.
- GREINER, W.; MÜLLER, B.: *Quantum Mechanics. Symmetries*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994. Obra original: 1989.

- GREINER, W.; SCHÄFER, A.: *Quantum Chromodynamics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994. Obra original: 1989.
- HORGAN, J.: La metafísica de las partículas, *Investigación y Ciencia* **211** (1994), 68–77.
- KEPLER, J.: *El secreto del universo*, Alianza Universidad, Alianza Editorial, Madrid, 1992. Obra original: 1621.
- KIRILLOV, A.: *Éléments de la théorie des représentations*, Éditions Mir, Moscou, 1974.
- KOSTRIKIN, A. I.; MANIN, Y. I.: *Linear Algebra and Geometry*, Algebra, Logic and Applications, Gordon and Breach Sci. Publishers, New York, 1989. Obra original: 1981.
- LANDAU, L.; LIFCHITZ, E.: *Mécanique Quantique*, Physique Théorique, Éditions Mir, Moscou, 1966.
- LAO ZI: *El libro del Tao*, Ediciones Alfaguara, Madrid, 1978.
- LARIO, J. C.; RIO, A.: An octahedral-elliptic type equality in $Br_2(k)$, *Comptes Rendus Academie des Sciences, Paris* **321** (1995), 39–44.
- MADDOX, C.: *Salvador Dalí*, Benedikt Taschen Verlag, Köln, 1990.
- MANIN, Y. I.: *Mathematics and Physics*, Progress in Physics, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1971. Obra original: 1979.

- MAZUR, B.: Deforming Galois representations in Galois groups over $\mathbb{Q}$, en el llibre *Galois Groups over $\mathbb{Q}$* , Ihara, I; Ribet, K.; Serre, J -P., ed., MSRI Publications, SpringerVerlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
- MENSCHING, G.: *Die Weltreligionen*, Carl Habel Verlag, Darmstadt, n.d.
- MONTES, J.; NART, E.: On a Theorem of Ore, *Journal of Algebra* 146 (1992), 318–334.
- NEUGEBAUER, O.; SACHS, A.: *Cuneiform Texts*, American Oriental Society, New Haven, 1945.
- NEUKIRCH, J.: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.
- NIETZSCHE, F.: *Also sprach Zarathustra*, Philipp Reclam, Stuttgart, 1978.
- OLVER, P. J.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, GTM, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.
- OSEN, L. M.: *Women in Mathematics*, History of Science, MIT Press, MA, 1974.
- PACIOLI, L.: *La Divina Proporción*, Fuentes de Arte, Ediciones Akal, Madrid, 1987. Obra original: 1509.
- PAPPAS, T.: *The Joy of Mathematics*, Wide World Publishing Tetra, San Carlos, CA, 1989. Obra original: 1986.

- PEDOE, D.: *Geometry and the Visual Arts*, Dover Publications, Inc., New York, 1983. Obra original: 1976.
- PIERCE, J. R.: *Los sonidos de la música*, Biblioteca Scientific American, Editorial Labor, 1985. Obra original: 1983.
- PLA, J.: El fet bibliotecari. Conferència Inaugural de l'Escola de Biblioteconomia i Documentació. Prepublicació (1992).
- PLATÓN: *Obras completas*, Grandes culturas, Aguilar ediciones, Madrid, 1981.
- PUIG ADAM, P.: *Ecuaciones diferenciales*, Biblioteca matemática, Madrid, 1964. Obra original: 1950.
- QUER, J.: Liftings of Projective 2-Dimensional Galois Representations and Embedding Problems, *Journal of Algebra* **171** (1995), 541–566.
- RIBET, K. A.: On modular representations of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms, *Inventiones mathematicae* **100** (1989), 359–407.
- ROSMORDUC, J.: *Una història de la Física i de la Química*, L'esparguer. Ciència, Edicions de la Magrana, Barcelona, 1993. Obra original: 1985.
- RYDER, L. H.: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. Obra original: 1985.
- SERRE, J-P.: *Œuvres. Collected papers I-II-III*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.

- _____: Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Duke Mathematical Journal* **54** (1987), 179–230.
- SESIANO, J.: *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the arabic translation attributed to Qustā ibn Lūqā*, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- SHAKESPEARE, W.: *The Complete Works of William Shakespeare*, Hamlyn, London-New York-Sydney-Toronto, 1958.
- SHIMURA, G.: *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications Mathematical Society of Japan, Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press, 1971.
- STEWART, I.: Deshojando la margarita, *Investigación y Ciencia* **222** (1995), 86–89.
- STILLWELL, J.: *Mathematics and its History*, UTM, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
- STRUİK, D. J. (ed.): *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, 1986. Obra original: 1969.
- VAN DER WAERDEN, B. L.: *Group Theory and Quantum Mechanics*, GMW, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. Obra original: 1932.
- _____: *Science awakening*, P. Noordhoff, Groningen, 1961.

- TAYLOR, R.; WILES, A.: Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Annals of Mathematics* **141** (1995), 553–572.
- TRAVESA, A.: Nombre d’extensions abéliennes sur $\mathbb{Q}$, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux* **2** (1990), 413–423.
- VERNET, J.: *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval*, UB–UAB, Bellaterra, 1979.
- REVERTER, A.; VILA, N.: Some projective linear groups over finite fields as Galois groups over $\mathbb{Q}$, en el llibre *Recent developments in the Inverse Galois Problem*, Fried et al., ed., Contemporary Mathematics, AMS, 1995. En premsa.
- VLADIMIROV, V. S.; VOLOVICH, I. V.; ZELENOV, E. I.: *p-adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet & East European Mathematics, World Scientific, Singapore, 1994.
- XARLES, F. X.: The scheme of connected components of the Néron model of an algebraic torus, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **436** (1993), 197–208.
- WEIL, A.: *Œuvres Scientifiques. Collected Papers* I–II–III, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.
- : *Number Theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1983.

- WEYL, H.: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 1950. Obra original: 1928.
- WEYL, H.: *Symétrie et mathématique moderne*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Flammarion éditeur, Paris, 1964. Obra original: 1952.
- WIGNER, E. P.: *Group Theory*, Academic Press, Berkeley, 1971. Obra original: 1959.
- WILES, A.: Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Annals of Mathematics* **141** (1995), 443–551.
- WUSSING, H.; ARNOLD, W.: *Biographien bedeutender Mathematiker*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 1975.
- ZAMACOIS, J.: *Teoría de la Música* I-II, Biblioteca de iniciación cultural, Editorial Labor, Barcelona, 1945–1954.

DISCURS DE CONTESTACIÓ
PER L'ACADÈMIC NUMERARI

EXCM. SR. DR. RICARD GARCIA i VALLÈS

Excm. Sr. Degà-President Dr. Josep Casajuana

Excms. Doctors de l'Acadèmia

Excma. Doctora Pilar Bayer i Isant

Senyores i senyors,

En la història de la Reial Acadèmia de Doctors assistim avui a un acte més dels que reflecteixen el caràcter interdisciplinari de la nostra corporació.

Crec important, ara, i decisiva amb vista al futur, la col·laboració interdisciplinària entre totes les ciències. Els científics de diverses ciències treballant en equip han aconseguit uns èxits que ni tan sols es somiava obtenir quan cada especialista treballava tancat en allò que considerava que era el seu camp i el seu vedat hermètic.

Un exemple clar el dona l'arqueologia. Quan amb l'arqueòleg col·laboren metges, químics, arquitectes, enginyers, etc., s'obtenen èxits com per exemple allò que suc-

ceí en 1961, a Califòrnia, en recollir geodes (pedres esfèriques, buides i amb l'interior recobert de cristalls), entre jaciments prehistòrics. Trobaren una pedra que prengueren per una geoda i, en tallar-la en dues parts aparegué porcellana, coure i una espiga metàl·lica, i això, en ser examinat per científics de diverses especialitats, féu pensar en la hipòtesi que es tractava del vestigi d'un equip elèctric.

Un altre exemple, i contemporani, és l'urbanisme. En aquest tema treballen junts arquitectes, economistes, juristes, sociòlegs, metges, etc.

En els dos exemples, les matemàtiques hi són sempre presents. Tota ciència les necessita, sigui a nivell elemental, mitjà o superior. I solament esmento, perquè és arxiconegut, les profundes relacions entre dret i medicina legal (amb la cooperació de la química i de la biologia), dret i ciències polítiques, religió i filosofia, geografia i geologia, etc. Recordo la frase que el Dr. Aguirre, acadèmic numerari d'aquesta corporació, cità de Holmes: "Si us ocupeu del dret els camins condueixen planerament a l'antropologia", i afegeix el Dr. Aguirre: "És perfectament adequat considerar el dret simplement com un gran document antropològic". No s'ha d'oblidar tampoc l'obra d'Alexandre Deulofeu, el qual en el seu llibre *La matemàtica de la història* enuncia la llei matemàtica que determina l'evolució dels pobles. En definitiva queda clara la importància de la col·laboració interdisciplinària.

* * *

La laudatio de la recipiendària no ofereix cap problema davant la vàlua científica de la doctora Pilar Bayer i Isant. En canvi sí que ofereix un problema quant a la seva exposició per la quantitat i la qualitat.

Catedràtica numerària d'àlgebra a la Universitat de

Barcelona previ un doctorat en matemàtiques amb excel·lent *cum laude*.

Té a favor seu més de quaranta-quatre publicacions científiques i estudis realitzats a les universitats de París i Regensburg.

Ha assistit a més de trenta congressos, ha presentat comunicacions i ha pronunciat conferències, a Saarbrücken, Loburg, Luminy, Ginebra, Essen i Valladolid.

Ha dut a terme més d'onze línies d'investigació i programació de llenguatge especialitzat.

Ha dirigit sis tesis doctorals, totes *cum laude*, algunes amb premi extraordinari i una amb premi de l'Institut d'Estudis Catalans.

Ha participat en seminaris i simposis a les universitats de Regensburg, Bordeus, Caen, Marsella, Metz, Ulm, Barcelona, Essen, etc.

És membre de comissions per a l'avaluació de programes, de comitès editorials, i també coordinadora de jornades, etc.

Ha pronunciat conferències a les universitats de Barcelona, Madrid, Santander, Gijón, Bilbao, Karlsruhe, Regensburg, París, i Ginebra.

Ha dirigit com a investigadora principal diversos projectes d'investigació.

Ha impartit quinze cursos de doctorat.

Finalment, dirigeix en l'actualitat tres tesis doctorals i continua realitzant multitud de treballs científics.

A més, la Dra. Bayer és professora de piano pel Conservatori Superior de Música de Barcelona.

Davant l'extraordinari currículum de la Dra. Bayer em sento "arxi-disminuït" i respectuosament en nom dels acadèmics de la nostra Reial Acadèmia que en aquest moment represento i en el meu propi dono la més cordial benvinguda a la Dra. Bayer a la nostra corporació. Esperem d'ella una injecció de ciència i de joventut.

* * *

Jo, com a acadèmic numerari vinc a complir una obligació, obligació que vaig contraure en acceptar l'honor de contestar el discurs d'ingrés, com a acadèmica, de la Dra. Pilar Bayer, però em trobo davant d'una obligació *do ut facias*. El *do* ha estat generós i científicament impecable. La doctora ha donat una lliçó de ciència i d'humanisme.

Jo, ara, sóc en el *facias*. Haig de contestar i és un treball per a mi difícil. Difícil per la categoria científica de l'acadèmica que avui ingressa. Difícil també per ser la Reial Acadèmia de Doctors una entitat interdisciplinària i multidisciplinària, i l'acadèmic numerari que contesta prové d'un camp científic diferent en el meu cas del dret i concretament del dret civil.

M'atreveixo a defensar que totes les branques del saber, per molt diferents entre elles que ens puguin semblar, tenen en comú certes regles aplicables indistintament, ja que aquestes solament són aparences diferents, per la seva vestimenta, dels fenòmens del raonar de la ment humana.

No hem d'oblidar tampoc que determinats temes d'investigació, per no dir tots, poden i han de ser examinats, en el seu total estudi, a través de diverses hipòtesis i teories

corresponents cadascuna a diferents especialitats. En definitiva, els que vivim en el segle XX, de cara al XXI, estem condemnats a ser ignorants en moltíssimes matèries, no podem ser enciclopèdics com ho van ser Aristòtil i també, per exemple, Diderot, i no és tan llunyà en el temps. La saviesa de la nostra època ultrapassa el nostre temps i el nostre enteniment (deia Unamuno que “la ciència no ocupa lloc però ocupa temps”). Conclusió: Hem de treballar en equip ja que és difícil que cada especialista domini tota la seva especialitat, que apareix davant els seus ulls com un enorme oceà, en frase del Dr. Méndez, acadèmic numerari de la nostra corporació.

La recerca de les regles generals, aquestes regles comunes a les quals al·ludia i l'estudi global dels problemes, han de merèixer l'atenció dels professionals d'unes i d'altres matèries i també l'anàlisi de regles provades en qualsevol altra disciplina, amb la finalitat d'indagar si són susceptibles d'aplicació a la nostra; la consecució d'aquest esforç per part de tot tipus de científics pot incrementar el grup de regles susceptibles d'aplicació en totes les ciències i que hauríem d'anomenar “regles universals”, més que no pas “generals”.

Les matemàtiques sempre m'han produït respecte i por, però també una profunda admiració des del meu camp de jurista i conscient dels errors en què podia incórrer (demano perdó a tots els matemàtics) em vaig interessar per la teoria dels grups en el camp de les matemàtiques, teoria que va formular, crec que per primera vegada, Galois. Aquesta resultà tan fecunda, que ha estat provada i confirmada successivament en el camp de la cristal·lografia, de la química, de la lògica, de la geometria i de l'àlgebra.

Vaig intentar examinar si era aplicable la “Teoria dels

grups” en la ciència del dret, a la manera de les reformes jurídiques que imposen els avenços científics i socials.

La “Teoria” (seguint en part Camy i Sánchez Cañete –*Rev. Crí. D. Immobiliari*, 1964–) en essència, és senzilla. Si tenim un tetràedre regular recolzat damunt una taula i si, per exemple, la cara en contacte amb aquesta és la cara número u i volem passar a fer que ho sigui la número quatre, podem arribar a aquesta situació de diverses maneres, sia directament, passant d’una a una altra, sia passant a recolzar-se sobre la taula les cares dues i tres com un mitjà d’arribar a fer que quedi definitivament sobre aquesta la cara quatre, que és la que preteníem col·locar en aquesta situació. En definitiva, el tetràedre quedarà sempre en repòs damunt la cara quatre, després de l’operació o operacions que hàgim realitzat i per a les quals partim de l’estat inicial de ser la primera la que es trobava en aquesta situació.

D’aquesta síntesi es pot deduir que l’essencial d’aquesta teoria dels grups consisteix en dues notes fonamentals, hi hagi o no concurrència d’aquestes, que són les que determinen si entre una sèrie de fenòmens es pot constituir o no un grup format per diversos d’aquests. La primera nota bàsica és que en tots hi hauran d’existir dues invariants, o sigui, en l’exemple assenyalat, les posicions inicials i finals d’aquell cos geomètric; la segona seran les variants possibles, és a dir, la possibilitat d’arribar d’una a una altra variant, en virtut d’un grup d’operacions que puguin ser substituïdes o permutades l’una per les altres sense que s’alteri per això el resultat final.

En examinar la formulació d’aquesta teoria es té la sensació que ha recollit quelcom que s’ha tractat d’aplicar al dret des de fa temps. Un exemple pot ser el d’aplicar la teoria a la classificació dels drets reals, i en fer-ho observarem que en respectar-se els principis bàsics d’aquesta s’aclareix

aquella classificació i resulta que hem d'atribuir a un dels grups d'aquests algun dret real que fins ara havíem col·locat en un altre, per raons que aleshores semblaren acceptables i que pot ser que no ho siguin tant.

A tall de simple intent es pot estudiar esquemàticament la classificació dels drets reals. (Fins avui dividits, fonamentalment, entre "propietat" i "tots els altres") basant-nos en el següent:

1r. DRETS REALS DE CONTINGUT PLE. Grup format pel dret real per excel·lència, que és el de la propietat. Classificació: a) Dret de propietat plena; b) Dret de propietat limitada, i c) Drets preparatoris d'aquesta propietat (certes espècies de possessió).

2n. DRETS REALS D'ÚS DE COSA ALIENA. Podem distingir: a) Dret real d'atribució total (drets d'usdefruit i de superfície; b) Dret real d'ús parcial de cosa aliena (servitud de pastures, servitud de llenya, etc.), i c) Dret real de contingut imprecís (dret d'habitació, dret d'arrendament, etc.).

3r. DRETS REALS DE CONSUM PARCIAL DE COSA ALIENA. No amb caràcter de consum total, sinó parcial, ja que si fos total suposaria la transferència de la propietat al tercer. Són escassos (usdefruits especials de mines, muntanyes, etc.).

4t. DRETS REALS SOBRE LA COSA ALIENA QUE AMPLIEN EL DOMINI SOBRE LA PRÒPIA O DRETS REALS D'AMPLIACIÓ DE LES FACULTATS DOMINI-CALS. (Servituds predials d'aqüeducte, d'estrep, de presa, etc.)

5è. DRETS REALS DE GARANTIA. En la situació a la qual ha arribat el dret en l'actualitat, totes les obligacions

recauen sobre el patrimoni de l'obligat, sia directament (obligacions de donar), sia indirectament (incompliments i transformació en indemnització de danys i perjudicis). Pot succeir que, en procedir al cobrament de les obligacions, hagi desaparegut el patrimoni del deutor o que existint el patrimoni sorgeixin creditors, concurrència de crèdits i pèrdua total o parcial. Per obviar aquests inconvenients hem de considerar el dret real d'hipoteca, el de penyora, el d'anticresi i d'altres.

6è. DRETS REALS DE RETENCIÓ DE GARANTIA. Retenir implica continuar tenint quelcom que hauria de ser lliurat o retornat. Aquesta retenció solament la concedeix el dret com a una garantia de certs crèdits.

7è. DRETS REALS D'ADQUISICIÓ PREFERENT. L'objecte dels drets d'aquest grup és el de concedir, adquirir una cosa, a títol onerós, amb preferència a qualsevol altra. Dins d'aquest grup podem considerar els drets de retracte i els de tempteig.

8è. DRETS REALS DE CONCURRÈNCIA EN LES TITULARITATS. Tenen la peculiaritat que els subjectes de drets que els ostenten són d'un rang igual, encara que poden diferenciar-se per la quantia respectiva del de cadascun. Com a elements d'aquest grup hem de considerar les comunitats amb finalitat pròpia, que són les normals i les més corrents (parets mitgeres, comunitat de cases per pisos, etc.).

* * *

Hi ha dos aspectes del discurs d'ingrés de la Dra. Pilar Bayer que m'han interessat, i m'han interessat molt:

En primer lloc una exposició amena, comprensible i didàctica. Tierno Galván deia amb freqüència: "La bona

didàctica és la que fa que el pensament de l'altre no s'interrompi i la que permet, quasi sempre, sense adonar-se'n, seguir la bona direcció". En el discurs de la doctora, que contesto, observo que té el que jo anomeno la difícil facilitat de fer-se entendre. No és fàcil trobar una exposició clara, senzilla i lúcida en una disciplina tan difícil com les matemàtiques.

En segon lloc la doctora ens ha donat una lliçó de ciència i humanisme. Ciència i humanisme han de ser una abraçada i no un mur que separa raó i sentiment.

Actualment som testimonis de l'enfonsament de moltes estructures (religioses, polítiques, familiars, etc.) i també de la manca de confiança i respecte envers altres estructures que encara es conserven, però en les quals quasi ningú no creu. Avui, a la fi del segle XX, s'estén la idea que l'home actual no té més futur que l'home i penso que si es jubila Déu en molts aspectes d'aquesta vida, la vacant s'ha de cobrir amb el mateix que decreta aquesta jubilació i d'aquí es desprèn que l'ateisme, en el fons, no és res més que un corriment d'escales. D'aquesta manera és inevitable que aparegui un nou humanisme. El primer, a la vora del Renaixement, fou literari, ja que la línia científica (Galileu, Giordano Bruno, Copèrnic, Kepler, Servet, etc.) anava per camins del silenci, del perill i de la foguera. Avui, el científic féu tantes coses que ha donat naixement a un nou humanisme tècnic.

Els avenços de les ciències han donat la volta a moltes coses, i a moltes coses que abans es creia que eren intocables. Només cal pensar, per exemple, que la senzilla aspirina ha significat davant l'exemplaritat del santoral romà (dolorista) un argument infinitament superior a l'eficàcia de Voltaire, de Diderot, de Sade, de Sartre, etc., sense descartar Lenin. Un analgèsic qualsevol, industrialment fabri-

cat, trenca mitja teologia moral de la que estudiaven els bisbes, en la seva època de seminari en el segle XIX i primeres dècades del segle XX. Altres productes farmacèutics en trenquen l'altra meitat. L'estampa del sant que ofereix el seu patiment al Senyor no amoïna les multinacionals de la química ni els farmacèutics d'aire tridentí o preconiliar. És un altre exemple interdisciplinari.

Vol dir això que la religió i, concretament, el cristianisme han baixat de nivell? No, de cap manera. Crec que ara, a la fi del segle XX, comencem a situar-nos al nivell, a l'alt nivell que li correspon. El nou humanisme no exclou l'existència d'un principi espiritual de l'home ni exclou tampoc l'existència de Déu. A més, situem el llistó de l'home en un lloc més alt ja que l'emancipem de moltes penalitats que, per exemple, assotaven l'home medieval, i avui l'ésser humà està preparat per atènyer metes més elevades, per dir-ho així. És clar que em refereixo als països on s'ha arribat a un cert nivell. Desgraciadament la barbàrie i les necessitats més elementals sense cobrir són flagells que ataquen gran part de la humanitat. Com a conclusió crec que el cristià de la nostra època té més responsabilitat i se li pot exigir molt més que a l'home primitiu, per exemple, que mancava de quasi tot el que actualment tenim.

Fins al segle XX la nostra cultura estava farcida del saber romà que, a la vegada, era el trasllat de la civilització grega. Avui sabem que la història de Grècia, a l'igual de la seva mitologia, és un teixit de lluites fratricides i les seves lleis, fins i tot les utòpiques de Plató, avui serien inhumanes fins i tot en els països més salvatges d'Europa, que també n'hi ha.

Durant segles hem portat el llast de la deïficació de Grècia i Roma, oblidant-nos que Atenes no és tota Grècia i que Roma no és absolutament hereva de Grècia. D'altra

banda l'Atenes de Pericles és qüestió de poques dècades, un respir entre les Guerres Mèdiques. L'Atenes dels set savis era un poble sense temples ni carrers acceptables i la cultura macedònica, que obre les portes a la cultura hel·lenística (no atenenca), la que influí més en Roma, és un llampec de quinze anys i així podria continuar.

Diu Hans Küng en la seva obra *Ser cristià*: “S’ha mirat al passat per no haver d’enfrontar-se amb el present i amb el futur”. No defenso que es llenci el passat sinó que, aprofitant tot el que tenim de bo, caminem amb vista al futur. Res de deïficació.

Científics humanistes i científiques com la Dra. Bayer ajudaran a superar l'al·legoria platònica. De la mateixa manera que els habitants de la caverna únicament veuen les figures, les siluetes que dibuixa la llum, avui molta gent veu l’home més en la seva ombra que a plena llum. Hi ha un canvi de valors i hem d’encaminar-nos vers una humanitat més perfecta sense les hipocresies del passat; una humanitat formada per homes (en el sentit d’home i dona), no superhomes ni infrahomes; una humanitat on el “tenir” no s’imposi sobre el “ser”, ja que moltes vegades el qui té molts i molts béns materials, i això vol dir molta força avui, no acostuma a tenir res més.

I acabo en nom de la Reial Acadèmia de Doctors i en nom propi donant a la Dra. Bayer la meua més cordial felicitació en ingressar en aquesta corporació acadèmica que a partir d’ara tindrà una experta en ciència matemàtica per solucionar els problemes que siguin sotmesos al seu examen.

La Reial Acadèmia, bo i respectant com a criteri d'autor les opinions exposades en les seves publicacions, no se'n fa responsable ni solidària.

© Reial Acadèmia de Doctors
Disseny: Anna Bosch i Baltasar
Impressió: Impremta Baltasar 1861
Tiratge: 300 exemplars.

Dipòsit legal: B-4122-1996

Índex

Introducció	7
§ 1. Antecedents al teorema de Pitàgores	9
§ 2. L'harmonia de les esferes	11
§ 3. Els sòlids platònics	12
§ 4. <i>Al-jabr wa'l muqābalah</i>	16
§ 5. <i>Liber abaci</i>	18
§ 6. El nombre auri	19
§ 7. <i>Mysterium cosmographicum</i>	21
§ 8. <i>Principia mathematica</i>	23
§ 9. La corda vibrant.....	24
§ 10. <i>Théorie analytique de la chaleur</i>	26
§ 11. Simetries	28
§ 12. L'àtom d'hidrogen.....	31
§ 13. <i>Jugendtraum</i>	33
§ 14. Un resultat actual	35
Cloenda	36
Bibliografia	37
Discurs de contestació per l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Ricard Garcia i Vallès	47

NOVES PUBLICACIONS DE LA REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

Directori 1991.

Los tejidos tradicionales en las poblaciones pirenaicas (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Eduardo de Aysa Satué, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Antoni Plana i Castellví, Doctor en Geografia i Història), 1992.

La tradición jurídica catalana (Conferència magistral del acadèmic de número Excm.Sr. Josep Joan Pintó i Ruiz, Doctor en Dret, en la Solemne Sessió d'apertura de curs 1992-93, que fou presidida per SS.MM. el Rei Joan Carles I i la Reina Sofia), 1992.

La identidad étnica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Angel Aguirre Baztan, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Josep M. Pou d'Avilés, Doctor en Dret), 1993.

Els laboratoris d'assaig i el mercat interior; Importància i nova concepció (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm.Sr. Josep M^a Simón i Tor, Doctor en Medicina i Cirurgia), 1993.

Contribución al estudio de las Bacteriemias (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Miquel Marí i Tur, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm.Sr. Manuel Subirana i Cantarell, Doctor en Medicina i Cirurgia), 1993.

Realitat i futur del tractament de la hipertròfia benigna de pròstata (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Albert Casellas i Condom, Doctor en Medicina i Cirurgia i President del Col.legi de Metges de Girona), 1994.

La seguridad jurídica en nuestro tiempo. ¿Mito o realidad? (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres), 1994.

La transició demogràfica a Catalunya i a Balears (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Ferrer i Bernard, Doctor en Psicologia), 1994.

L'art d'ensenyar i d'aprendre (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Agustín Luna Serrano, Doctor en Dret), 1995.

Sessió necrològica en record de l'Excm.Sr. Lluís Dolcet i Buxeres, Doctor en Medicina i Cirurgia i Degà emèrit de la Reial Acadèmia de Doctors, que morí el 21 de gener de 1994. Enaltíren la seva personalitat els acadèmics de número Excms.Srs.Drs. Ricard García Vallès, Josep M^a Simón i Tor i Albert Casellas i Condom. 1995.

La Unió Europea com a creació del geni polític d'Europa (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Jordi García-Petit i Pàmies, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques), 1995.

La explosión innovadora de los mercados financieros (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Emilio Soldevilla García, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariales, i contestació per l'Excm.Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret), 1995.

La cultura com a part integrant de l'Olimpisme (Discurs d'ingrés com acadèmic d'honor de l'Excm.Sr. Joan Antoni Samaranch i Torelló, Marquès de Samaranch, i contestació per l'Excm.Sr. Jaume Gil i Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques), 1995.

Medicina i Tecnologia en el context històric (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Ricard García i Vallès, Doctor en Dret), 1995.

REAL ACADEMIA DE DOCTORS

—Publicacions—