

# La media ponderada ordenada probabilística: Teoría y aplicaciones

José M. Merigó Lindahl



Reial Acadèmia de Doctors





**José M. Merigó** es un Investigador Asociado Senior en la Manchester Business School de la Universidad de Manchester (Reino Unido). Previamente, era Profesor Lector en Economía Financiera y Contabilidad de la Universidad de Barcelona. Es Licenciado y Doctor (con premio extraordinario) en Estudios Empresariales por la UB, *Bachelor of Science, Bachelor of Social Science in Economics* y *Master in European Business Administration and Business Law* por la Lund University (Suecia).

De su actividad investigadora, se destaca la publicación de más de 200 trabajos de investigación incluyendo más de 50 artículos en revistas indexadas en la Web of Science – Journal Citation Reports (ISI) como *Information Sciences*, *International Journal of Intelligent Systems*, *Computers & Industrial Engineering*, *Knowledge-Based Systems*, *European Journal of Operational Research*, *Expert Systems with Applications*, *Technological and Economic Development of Economy*, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, *Insurance: Mathematics & Economics*, *Management Decision*, *Group Decision and Negotiation*, *Cybernetics & Systems* and *International Journal of Fuzzy Systems*. Ha publicado 9 libros incluyendo 3 con Springer y 2 con World Scientific. Pertenece al consejo editorial de muchas revistas internacionales incluyendo tres indexadas: *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, *Technological and Economic Development of Economy* y *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*.

Ha participado en una gran variedad de comités científicos y ha servido como revisor en un gran número de revistas. Actualmente está interesado en operadores de agregación, toma de decisiones, incertidumbre, inteligencia computacional, bibliometría y aplicaciones en economía y empresa.





# **La media ponderada ordenada probabilística: Teoría y aplicaciones**

**Excmo. Sr. D. José M. Merigó Lindahl**



# **La media ponderada ordenada probabilística: Teoría y aplicaciones**

Discurso de ingreso en la Reial Acadèmia de Doctors, como  
Académico Numerario, en el acto de su recepción  
el 20 de mayo de 2014

**Excmo. Sr. D. José M. Merigó Lindahl**  
Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales

Y contestación del Académico de Número

**Excmo. Sr. D. Josep Pla i Carrera**  
Doctor en Ciencias Matemáticas

**COL·LECCIÓ REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS – FUNDACIÓ UNIVERSITARIA ESERP**



**Reial Acadèmia de Doctors**  
[www.reialacademiadocitors.cat](http://www.reialacademiadocitors.cat)



[www.eserp.com](http://www.eserp.com)

© José M. Merigó Lindahl.  
© Reial Acadèmia de Doctors.  
© Fundación Universitaria Eserp.

La Reial Acadèmia de Doctors, respetando como criterio de autor las opiniones expuestas en sus publicaciones, no se hace ni responsable ni solidaria.

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del “Copyright”, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos públicos.

Producción Gráfica: Ediciones Gráficas Rey, S.L.

Impreso en papel offset blanco Superior por la Reial Acadèmia de Doctors.

ISBN: 978-84-617-0137-7

Depósito Legal: B 12322-2014

Impreso en España –Printed in Spain- Barcelona

Fecha de publicación: Mayo 2014

En el año del Centenario de la Reial Acadèmia de Doctors, la Fundación Universitaria ESERP ha querido contribuir a la creación de una nueva colección de publicaciones que lleva el nombre de las dos entidades así consorciadas. Su aportación permite que la Academia cuente con esta nueva herramienta al servicio de la difusión del conocimiento.

## PRESENTACIÓN

Excelentísimo Señor Presidente,  
Excelentísimos Señores Académicos,  
Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,  
Señores y Señoras:

Es un gran agrado para mi empezar este discurso expresando mi alegría y satisfacción por haber sido elegido Académico Numerario de la Reial Acadèmia de Doctors. Este hecho representa un reconocimiento fundamental a mi carrera profesional como profesor e investigador que me eleva a un nivel superior dentro del mundo académico.

En primer lugar, deseo expresar mis más profundos agradecimientos a todos los Académicos que han apoyado mi ingreso en la academia, especialmente a la Excelentísima Sra. Vicepresidenta de esta Ilustre Corporación, Dra. Anna M. Gil Lafuente, por ser uno de los principales impulsores de mi candidatura como Académico Numerario. También quiero agradecer al Excelentísimo Sr. Presidente de esta Ilustre Corporación, Dr. Alfredo Rocafort Nicolau, y al resto de miembros de la Junta de Gobierno por todo el apoyo brindado.

Aprovecho también para hacer una mención especial al Excelentísimo Sr. Dr. Josep Casajuana, antiguo Presidente de la Reial Acadèmia quien estuvo liderando esta Ilustre Corporación hasta la fecha de su fallecimiento en agosto de 2013. Su liderazgo ha sido fundamental para el desarrollo de la Reial Acadèmia que actualmente está experimentando un gran crecimiento y que espera consolidar su influencia en una economía del conocimiento cada vez más avanzada y compleja.

Mi incorporación en la Reial Acadèmia es un hecho clave en mi carrera que me lleva a asumir un alto grado de responsabilidad tanto científico como moral. Para mí es un honor poder celebrar con ustedes mi ingreso en esta Ilustre Corporación con el discurso que voy a presentar a continuación.

El tema que voy a presentar en este discurso de ingreso versa sobre un nuevo concepto que he estado desarrollando en los últimos años y que abarca a un gran número de disciplinas científicas. Se trata de una herramienta de la estadística con una aplicabilidad muy amplia. Aun así, cabe destacar que esta herramienta ha sido diseñada mayoritariamente dentro del ámbito de las ciencias de la computación. Este operador es la media ponderada ordenada probabilística que viene del inglés *probabilistic ordered weighted average (POWA)*. Como el mismo nombre indica, es un modelo más general a la media ponderada clásica que incluye a la probabilidad y a unas ordenaciones que reflejan la actitud del decisor en el análisis.

Este operador fue diseñado en el 2008 pero no fue publicado en una revista internacional hasta el 2012 (Merigó, 2012a). Este operador es una generalización de la ya muy conocida media ponderada ordenada de Yager (1988) mediante el uso de probabilidades. La media ponderada ordenada, del inglés *ordered weighted average*, es un operador que proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación entre el mínimo y el máximo. Permite sobrevalorar o infravalorar la información según la actitud del decisor en el problema estudiado. Desde su aparición, ha sido fuente de numerosas extensiones y aplicaciones.

La principal ventaja del operador POWA es su flexibilidad en el proceso de integración de la probabilidad y el operador OWA en un marco superior que permite considerar ambos concep-

tos según su grado de importancia en el problema específico estudiado. De esta forma, el operador POWA incluye a ambos conceptos y al mismo tiempo se puede reducir en cualquiera de los dos en el caso de que la información disponible así lo requiera. En teoría de la decisión permite unificar los dos grandes entornos en uno sólo a partir del cual los otros dos son casos particulares. Es decir, crea un sistema de toma de decisiones en condiciones de riesgo e incertidumbre dentro de una misma formulación.

Un ejemplo muy simple para entender el funcionamiento de este operador es mediante el estudio de la probabilidad de lluvia. Generalmente, este hecho se estudia mediante la información histórica que nos dice la probabilidad de lluvia en estas fechas. Muchas veces, de forma intuitiva se suele modificar esta probabilidad según nuestra actitud. Es decir, el decisor optimista tenderá a reducir la probabilidad de lluvia mientras que el pesimista la incrementará. Aunque este hecho es común en la literatura, es importante destacar que el modelo natural estadístico que está detrás de esta manipulación de la probabilidad es el operador POWA. Por ejemplo, si damos la misma importancia al operador OWA y a la probabilidad (50%), suponemos una probabilidad de lluvia del 20% y un decisor muy optimista que quiere creer que no va a llover (0%), entonces la probabilidad de lluvia que se reflejaría en su intuición sería del 10%. La razón es que quiere creer que no va a llover, pero sabe que en estas fechas llueve en un 20%. Por tanto, lo que hace es infravalorar la probabilidad de lluvia al 10%. Pero aun así sigue teniendo en cuenta que existe la posibilidad de lluvia. Matemáticamente, lo que se ha hecho es:  $0.5 \times 0.2 + 0.5 \times 0 = 0.1 \rightarrow 10\%$ . Como se puede observar, el operador POWA es el que permite sobrevalorar o infravalorar la información probabilística disponible en el problema parametrizando los resultados desde el 0% hasta el 20% considerado.

El operador POWA se extenderá mediante el uso de conceptos que incrementan su representatividad como es el operador POWA inducido, lingüístico, borroso, generalizado y de distancias. En la literatura existen muchas otras generalizaciones pero en este discurso lo que se pretende es mostrar una introducción a algunos de los conceptos fundamentales.

A continuación, se desarrollará un modelo más general que integra al operador OWA con la probabilidad y la media ponderada. La inclusión de la probabilidad y la media ponderada se lleva a cabo con objeto de distinguir entre la información subjetiva y objetiva. En teoría de la probabilidad esto muchas veces se clasifica como probabilidad objetiva y subjetiva. Obsérvese que la objetividad es aquella información que viene medida por algún aspecto arbitrario como sería un experimento o la información histórica. Por el otro lado, la subjetividad viene expresada por opiniones o aspectos de carácter particular y no estrictamente arbitrario. A este operador se le conoce en la literatura internacional como el *probabilistic ordered weighted averaging weighted average (POWAWA)* que traducido al español sería media ponderada ordenada probabilística ponderada. Obsérvese que en inglés también se le podría denominar como *probabilistic weighted ordered weighted average (PWOWA)*. No se ha hecho así porque en la literatura existen otros modelos relacionados que utilizan una nomenclatura similar.

La gran ventaja de este operador es la posibilidad de integrar estos tres grandes conceptos (probabilidad, media ponderada y OWA) en un solo modelo que los incluye teniendo en cuenta el grado de importancia que tienen en el caso estudiado. A su vez, se puede reducir a cualquiera de los tres conceptos clásicos si la simplicidad del problema así lo requiere. Por tanto, la aplicabilidad del operador POWAWA es muy amplia ya que todos los estudios que se hayan hecho o se hagan en el futuro con

cualquiera de los tres conceptos, es susceptible de ser revisado y mejorado por este operador más general. La razón es evidente ya que simplemente reduciendo el POWAWA a uno de los tres conceptos lo convierte en dicho concepto y por tanto está incluido en su uso. La ventaja del POWAWA es que permite ofrecer una representación más amplia que se adapta a una gran variedad de imprecisiones y complejidades.

En este caso también se desarrollarán una gran variedad de extensiones y generalizaciones al operador POWAWA incluyendo el operador POWAWA inducido, POWAWA lingüístico, POWAWA borroso, POWAWA generalizado y POWAWA de distancias. De esta forma, se podrá observar algunos de los principales operadores de agregación que se espera que tengan una gran proyección e influencia en la comunidad científica en el futuro.

Finalmente, esta presentación terminará con un breve resumen de aplicaciones potenciales que se pueden hacer con estos operadores dando especial atención a la teoría de la decisión empresarial que incluye procesos de gestión financiera, comercial y estratégica. También se hará una mención especial a la estadística ya que es uno de los puntos originarios de estos operadores a partir de los cuales se espera poder desarrollar una gran variedad de aplicaciones. En este sentido, hay que destacar que la mejora de la probabilidad y la media ponderada lleva a una revisión profunda de toda la estadística que consecuentemente también afectará a la física estadística, a la bioestadística y a otras disciplinas afines.





# ÍNDICE

Presentación .....	7
<b>DISCURSO DE INGRESO .....</b>	<b>11</b>
1. INTRODUCCIÓN.....	15
2. INTRODUCCIÓN A LOS OPERADORES <i>OWA</i> .....	23
3. LA MEDIA PONDERADA ORDENADA PROBABILÍSTICA.....	27
4. UNIFICACIONES ENTRE OPERADORES <i>OWA</i> , MEDIAS PONDERADAS Y PROBABILIDADES.....	43
5. APLICABILIDAD DE LOS OPERADORES <i>OWA</i> .....	69
6. CONCLUSIONES.....	79
BIBLIOGRAFIA.....	79
<b>DISCURS DE CONTESTACIÓ .....</b>	<b>89</b>
Publicaciones de la Reial Acadèmia de Doctors.....	105



## ❖ I. INTRODUCCIÓN

La teoría de la decisión en la incertidumbre es un área de las ciencias sociales y de las ciencias en general que siempre ha suscitado gran interés. Pero es especialmente en los últimos 50 años cuando toma una increíble importancia en el mundo científico. Gran número de cuestiones surgen en estos años como son la teoría de la utilidad, la teoría de juegos o la teoría de los subconjuntos borrosos. En este estudio, se hace especial referencia a 2 de estas teorías. Una, propuesta por Zadeh (1965) en la cual se introduce el concepto de los conjuntos borrosos y otra, propuesta por Yager (1988) en la cual se introduce el concepto de *ordered weighted averaging (OWA) operator*. Con estas 2 teorías, junto con las aportaciones desarrolladas en el ámbito empresarial por Kaufmann y Gil-Aluja (1986; 1987), se tratará de analizar la situación actual en esta área sobre la teoría de la decisión y se analizará qué diferentes aportaciones se pueden realizar en el contexto de los operadores de agregación.

El operador OWA es un tipo de media que proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación que fluctúan entre el máximo y el mínimo. Por tanto, de entrada es una herramienta estadística. Pero a día de hoy, a donde más relevancia se le ha dado es en la resolución de problemas de teoría de la decisión ya que este operador unifica a los criterios clásicos de decisión. Es decir, unifica al criterio optimista, pesimista, de Laplace y de Hurwicz en un único modelo a partir del cual el resto de casos son casos particulares de adoptar una postura concreta en dicha unificación. Además, otros criterios clásicos como el criterio de Savage también pueden ser utilizados con este operador aunque no se consiga una unificación natural como se había conseguido con los otros cuatro criterios (Yager, 2004a).

Los operadores *OWA* han sido fuente de numerosas extensiones (Beliakov et al. 2007; Yager and Kacprzyk, 1997; Yager et al. 2011). Constantemente van apareciendo nuevos enfoques sobre distintos aspectos teóricos que amplían su conocimiento. Por ejemplo, se puede mencionar el *induced OWA* (IOWA) *operator* de Yager y Filev (1999) en donde se proponía utilizar un proceso de reordenación de mayor complejidad basado en variables inducidas. Herrera et al. (1995) propuso un operador OWA que podía tratar con información lingüística. Este modelo ha sido posteriormente mejorado por Herrera y Martínez (2000) a través de un modelo lingüístico más completo basado en 2-tuplas a partir de las cuales no se pierde información en el proceso de agregación. También Xu (2004a; 2004b) ha desarrollado un nuevo modelo lingüístico para tratar situaciones con elevados grados de incertidumbre. Otro tipo de modelos que han sido tratados mediante los operadores OWA son aquellos que utilizan información imprecisa representada mediante intervalos de confianza. A este operador se le ha denominado *uncertain OWA* (UOWA) *operator* (Xu y Da, 2002). También se han desarrollado extensiones similares con números borrosos (Merigó y Casanovas, 2010).

Una de las extensiones más relevantes es aquella que generaliza los operadores OWA a través de la noción de media. Esta generalización se ha conseguido desde dos perspectivas. Una primera vertiente es aquella que generaliza los operadores OWA mediante la media generalizada. A esta generalización se le conoce como *generalized OWA* (GOWA) *operator* (Karayiannis, 2000; Yager, 2004b). De esta forma, aparte de obtener el operador OWA como un caso particular, se consigue una versión OWA de la media geométrica, harmónica y cuadrática. Una segunda vertiente es aquella que generaliza a los operadores OWA mediante las medias cuasi-aritméticas.

A esta generalización se le denomina *Quasi-OWA operator* (Fodor et al. 1995; Calvo et al. 2002). Cabe destacar que el operador GOWA es un caso particular del Quasi-OWA (Merigó y Casanovas, 2011a).

Cabe destacar que la traducción al español del concepto OWA vendría a ser algo como media ponderada ordenada. Para evitar confusiones lingüísticas, en el trabajo se utilizará siempre la abreviatura inglesa OWA.

Para finalizar esta breve introducción, se hará un breve análisis bibliométrico sobre los operadores OWA para ver su impacto actual en la comunidad científica internacional. Se utilizará la base de datos Web of Science que es la comúnmente utilizada en la comunidad científica ya que incluye a las revistas que han recibido el reconocimiento de máxima calidad. Se analizará la información mediante la palabra clave OWA y mediante aquellos artículos que citan al trabajo clásico de Yager (1988). Aquellos que utilizan la palabra OWA son menos pero son los que estrictamente se centran en algún aspecto de estos operadores mientras que los que citan el trabajo de Yager son un número mayor ya que generalmente se incluyen los anteriores pero también aparecen algunos trabajos adicionales que con carácter más indirecto o parcial también hacen uso de dichos operadores.

La palabra clave OWA ha obtenido 1.235 entradas en la base de datos mientras que en la actualidad hay 2.055 trabajos que citan a Yager (1988) en la Web of Science. A continuación, se muestra una gráfica con la evolución del número de trabajos.

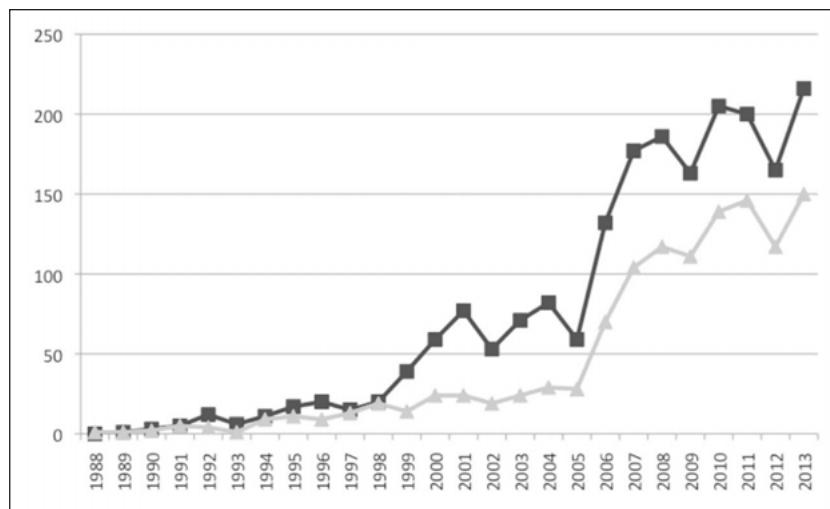


Figura. Número de trabajos publicados por año sobre los operadores OWA

Como se puede observar, el número ha crecido sustancialmente en los últimos años llegándose a cifras cercanas a los 200 artículos anuales. La línea con cuadros hace referencia al número de trabajos anuales que citan el artículo clásico de Yager (1988) mientras que la línea de triángulos hace referencia al número de trabajos anuales con la palabra clave OWA. Obsérvese que este número hace referencia a trabajos indexados en la Web of Science. Obviamente, si se consideran todas las revistas, libros y congresos, el número de artículos publicados es mucho mayor. A modo de ejemplo, decir que en Google Scholar, una base de datos mucho más amplia, el artículo clásico de Yager ha recibido más de 4.200 citas. Es decir, más del doble que en la Web of Science. Y la cifra sería mucho mayor si se consideran todos los trabajos hechos en este ámbito independientemente de que estén indexados o no en esta base de datos.

Estas ideas han sido publicadas en una gran variedad de revistas internacionales destacando principalmente las que se presentan en la siguiente tabla por ser las que han publicado un mayor número de artículos sobre los operadores OWA. Obsérvese que se presenta el número de artículos (TP), citas de dichos artículos (TC), número total de artículos en la revista (TPJ), porcentaje de artículos en los que aparece la abreviatura OWA (%OWA) y el factor de impacto de la revista en el sistema de 2 (2IF) y 5 años (5IF).

Tabla. Revistas más influyentes sobre los operadores OWA

	Revista	TP	TC	TPJ	%OWA	2IF	5IF
1	<i>Int. J. Intelligent Systems</i>	75	2218	1417	5.29%	1.41	1.57
2	<i>Fuzzy Sets and Systems</i>	67	3391	7002	0.96%	1.74	2.21
3	<i>Expert Systems with Applications</i>	48	746	8858	0.54%	1.85	2.33
4	<i>Information Sciences</i>	45	1564	5956	0.76%	3.64	3.67
5	<i>Int. J. Uncert. Fuzz. Knowledge Based Syst.</i>	41	627	985	4.16%	0.88	1.38
6	<i>IEEE Trans. Fuzzy Systems</i>	33	1216	1602	2.06%	5.48	4.88
7	<i>Int. J. Approximate Reasoning</i>	27	888	1268	2.13%	1.72	2.16
8	<i>Knowledge-Based Systems</i>	27	309	1812	1.49%	4.10	3.37
9	<i>Computers &amp; Industrial Engineering</i>	20	373	5218	0.38%	1.51	2.02
10	<i>European J. Operational Research</i>	18	571	14816	0.12%	2.03	2.52

Otro aspecto interesante es ver qué autores han liderado el desarrollo de estos operadores en la comunidad internacional. En la siguiente tabla se presenta los 20 autores con mayor número de trabajos en este ámbito. También se muestra el número de citas, los resultados en los últimos 10 años y artículos que citan el trabajo clásico de Yager (1988).

Tabla. Ranking de autores más influyentes en los operadores OWA

	Autor	País	TP	TC	10YP	10YC	TPY	TCY
1	RR Yager	USA	92	5683	44	857	143	6570
2	JM Merigó	ESP	87	1107	87	1107	89	1088
3	ZS Xu	CHN	50	2635	45	1891	73	3109
4	E Herrera Viedma	ESP	35	2929	22	922	60	3871
5	XW Liu	CHN	32	389	28	320	31	391
6	F Chiclana	ESP	26	1273	20	553	25	1564
7	V Torra	ESP	26	441	14	52	48	563
8	M Casanovas	ESP	25	511	25	511	27	511
9	AM Gil Lafuente	ESP	24	376	24	376	25	376
10	CH Cheng	CHN	21	112	21	112	18	106
11	F Herrera	ESP	21	2915	8	616	33	4375
12	HY Chen	CHN	20	219	20	219	23	186
13	LG Zhou	CHN	20	218	20	218	22	185
14	SZ Zeng	CHN	19	91	19	91	22	97
15	Z Pei	CHN	18	36	18	36	24	97
16	GW Wei	CHN	18	357	18	357	31	462
17	L Martínez	ESP	16	1043	12	322	25	1598
18	R Mesiar	SLK	16	176	12	90	35	501
19	J Montero	ESP	16	86	11	42	27	186
20	BS Ahn	S.K.	15	163	15	163	14	152

A nivel de países, en la siguiente tabla, al igual que la anterior, se puede observar como los Estados Unidos, China y España son los que están liderando estas investigaciones. Este hecho es destacable para el caso español sobre todo teniendo en cuenta la diferencia de tamaño con respecto a los otros dos países.

Tabla. Países más influyentes en los operadores OWA

	Autor	TP	TC	10YP	10YC	TPY	TCY
1	PR China	358	4895	343	4033	469	5976
2	España	245	5646	197	2552	391	7737
3	USA	184	6440	111	1375	303	8399
4	Irán	63	290	62	290	60	274
5	Taiwan	58	537	56	443	96	1201
6	Reino Unido	58	1010	55	846	84	1287
7	Italia	44	543	33	198	106	1019
8	Canadá	39	349	36	303	82	786
9	Polonia	36	254	28	86	106	962
10	Corea del Sur	34	221	31	185	40	667
	Total	1235	17814	1025	9480	2055	28556

Obsérvese que las citas de Estados Unidos incluyen las 2.055 citas del trabajo clásico de Yager (1988). Además, existen algunos casos en los que en un mismo artículo han participado autores de diferentes nacionalidades. En este caso, se ha asignado una unidad a cada país que ha participado en el trabajo.





## ❖ 2. INTRODUCCIÓN A LOS OPERADORES *OWA*

Un modelo más completo a los criterios clásicos de decisión en la incertidumbre es el propuesto por Yager (1988) cuando generaliza los criterios optimista, pesimista (Wald, 1950), de Hurwicz (1951) y de Laplace, en un único modelo a través del cual los otros 4 criterios son el resultado particular de adoptar una determinada actitud ante la incertidumbre. Además, los otros criterios explicados anteriormente, también son extensibles a los *OWA operators* aunque no se consiga una generalización natural como era el caso de los otros 4 criterios.

Los operadores *OWA* son unos instrumentos que permiten agregar la información. Es decir, a partir de una serie de datos se puede obtener un único valor representativo de la información. Como característica adicional de los operadores *OWA* se puede decir que el valor representativo obtenido es un valor agregado de acuerdo con unos parámetros de optimismo/pesimismo predeterminados. De esta forma, cada decisor puede agregar la información de una forma distinta según cual sea su grado de optimismo o pesimismo. Cabe destacar que desde un punto de vista más matemático, se puede decir que los operadores *OWA* sirven para agregar la información dentro de unos límites delimitados por el mínimo y el máximo. A continuación, se hará un breve resumen sobre dichos operadores *OWA*.

**Definición:** Una función  $f: R^n \rightarrow R$  es un *OWA operator* de dimensión  $n$  si tiene un vector asociado  $W$  de dimensión  $n$  tal que sus componentes satisfacen:

$$1) \quad w_j \in [0, 1]$$

$$2) \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1$$

y

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j, \quad (1)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ .

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos (estados de la naturaleza) con las ponderaciones (coeficientes). Se puede observar que también podemos expresar esta agregación en una notación vectorial como:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = W^T B. \quad (2)$$

En esta expresión,  $W$  es el vector *OWA* de pesos asociado con la agregación, y  $B$  es el vector argumento ordenado (Yager y Filev, 1999); donde el  $j$ -ésimo componente en  $B$  es  $b_j$  siendo este el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ . Usando esta notación vectorial, podemos distinguir claramente la parte del proceso que es lineal (la multiplicación matricial) de la parte no-lineal (la formulación de  $B$ ).

Un *OWA operator* es una media. Esto es reflejo del hecho de que el operador tiene las siguientes propiedades:

- (1) Conmutatividad: cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación.
- (2) Monotonía: Si  $a_i \geq d_i$  “ $i \models f(a_1, \dots, a_n) \geq f(d_1, \dots, d_n)$ ”.
- (3) Limitado:  $\text{Min}\{a_i\} \leq f(a_1, \dots, a_n) \leq \text{Max}\{a_i\}$ .

Es esta 3<sup>a</sup> propiedad la que efectivamente lo convierte en un operador de medias. Una importante implicación de esta 3<sup>a</sup> propiedad es la idempotencia del operador: si  $a_i = a$ ,  $\forall i \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = a$ .

Otro aspecto a destacar son las medidas introducidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. La primera medida hace referencia al carácter atitudinal del decisor  $\alpha(W)$  y es definido como:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n-j}{n-1} \right). \quad (3)$$

Como se puede observar,  $\alpha \in [0, 1]$ . Cuanto más peso esté localizado cerca del tope de  $W$ , más cerca estará  $\alpha$  de 1 y viceversa. Cabe destacar que para el criterio optimista u operador máximo  $\alpha = 1$ , para el pesimista  $\alpha = 0$ , y para el criterio de Laplace  $\alpha = 0.5$ .

La segunda medida introducida también por Yager (1988), se conoce como la entropía o dispersión de  $W$ . Es definida como:

$$H(W) = - \sum_{j=1}^n w_j \ln(w_j). \quad (4)$$

Esto puede ser usado para ofrecer una medida sobre la información que está siendo usada en la agregación. Por ejemplo, si  $w_j = 1$  para algún  $j$  (conocido como *step-OWA* (Yager, 1993)), entonces  $H(W) = 0$ , lo cual implica que la información usada es mínima. Por el otro lado, si  $w_j = 1/n$  para todo  $j$ , entonces la entropía de dispersión es máxima. Obsérvese que esta entropía sigue la metodología de Shannon (1948).

A continuación, se va a estudiar algunos casos particulares de operadores *OWA*. Para ello, se van a analizar diferentes alternativas a utilizar a la hora de fijar el vector de ponderaciones  $W$ . Como resulta evidente, a través de escoger una manifestación diferente del vector de pesos, somos capaces de obtener diferentes tipos de agregaciones. Entre ellas, se encuentran las agregaciones propuestas previamente en los criterios de decisión clásicos.

- (1) Para el criterio optimista:

$$w_1 = 1 \text{ y } w_j = 0, \forall j \neq 1 \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = \text{Max}\{a_j\}$$

- (2) Para el criterio pesimista:

$$w_n = 1 \text{ y } w_j = 0, \forall j \neq n \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = \text{Min}\{a_j\}$$

- (3) Para el criterio de Laplace:

$$: w_j = 1/n, \forall j \quad f(a_1, \dots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^n a_j$$

- (4) Para el criterio de Hurwicz:

$$w_1 = \alpha, w_n = 1 - \alpha \text{ y } w_j = 0, j \neq 1, n \quad f(a_1, \dots, a_n) = \alpha \times \text{Max}\{a_j\} + (1 - \alpha) \times \text{Min}\{a_j\}.$$

A partir de aquí, se pueden hacer una gran variedad de extensiones y generalizaciones mediante el uso de herramientas matemático-estadísticas adicionales entre los cuales destaca-ría los mencionados anteriormente en la introducción y otros como el operador OWA heavy (Yager, 2002), la varianza con OWA (Yager, 1995; 2006) y operadores inducidos (Merigó y Gil-Lafuente, 2009; Yager, 2003)



### ❖ 3. LA MEDIA PONDERADA ORDENADA PROBABILÍSTICA

En este capítulo se presenta una nueva formulación para unificar el operador OWA con la noción de probabilidad. De esta forma, se obtendrá un nuevo modelo que podrá representar en la misma formulación a la probabilidad de ocurrencia de los elementos y al grado de optimismo que se desee utilizar en el problema. Por así decirlo, este modelo transformará las probabilidades iniciales a través de sobrevalorar o infravalorar el problema.

La motivación de este modelo radica en lo siguiente. La probabilidad es una medida (ya sea objetiva o subjetiva, en este capítulo se entenderá como objetiva ya que la subjetiva se encuentra implícitamente dentro del concepto de media ponderada explicada en el capítulo 8) que permite modelizar la incertidumbre con un cierto carácter de arbitrariedad. El problema es que independientemente de la arbitrariedad, la incertidumbre sigue existiendo en el problema y por tanto nadie puede garantizar que los resultados probabilísticos sean los correctos. Son los que tienen mayor probabilidad de ocurrencia pero no por ello son correctos. Por tanto, en muchos casos puede darse la situación de que los resultados probabilísticos no son del todo satisfactorios. También puede darse el caso de que simplemente el analista del problema desea sobrevalorar o infravalorar los resultados arbitrarios obtenidos con la probabilidad debido a que es un tipo de decisor que prefiere ser más optimista o pesimista que los resultados probabilísticos. Este hecho es el que se suele tratar con el operador OWA. Pero el problema del operador OWA es que se concentra exclusivamente en este hecho y a veces esto puede ser erróneo. Una mejor forma de considerar el problema es utilizando al operador OWA, pero al mismo

tiempo considerando el conocimiento probabilístico (objetivo o subjetivo) disponible. En algunos casos, el conocimiento basado en probabilidades será mínimo, en otros casos será adecuado y en otros casos, independientemente del conocimiento, se le querrá dar más o menos importancia.

Cabe destacar que este concepto se acerca al concepto de utilidad en el sentido de que los resultados no son estrictamente los disponibles en las probabilidades. Sino que se pueden considerar otras situaciones según las circunstancias del decisor. En teoría de la utilidad esto se ve desde el punto de vista de *la utilidad que puede implicar un resultado* mientras que en el operador OWA esto se ve desde la perspectiva del grado de optimismo del decisor que combinado con extensiones más complejas (versiones inducidas (IOWA) y similar), se cree que llevan a un concepto unificador entre el operador OWA y la noción de utilidad. Obsérvese que se está comentando que 2 ramas de la teoría de la decisión converjan en una misma y única dirección. Como se ha dicho, se cree que esta misma dirección se conseguirá mediante extensiones IOWA y similar pero aun así, esto queda para futuras investigaciones.

A este operador, en términos generales, se le denominará como *probabilistic ordered weighted averaging operator* o el operador POWA. La traducción al español sería media ponderada ordenada probabilística. Como el mismo nombre indica, es una generalización de la media ponderada en la que se considera ordenaciones y probabilidades. Obsérvese que también se comentará la aproximación de Engemann et al. (1996) y Yager et al. (1995) sobre el concepto de *immediate probabilities*. Cabe destacar que también sería posible considerar los conceptos de *hybrid average* (Xu y Da, 2003) y operador WOWA (Torra, 1997) como modelos probabilísticos ya que la metodología sería la misma en el sentido de

que analizan medias ponderadas que pueden ser vistas como probabilidades subjetivas. Por tanto, también resulta posible extender estos modelos a situaciones con probabilidades objetivas.

La gran ventaja del operador POWA, además de unificar el concepto de probabilidad con el operador OWA, es la posibilidad de unificar estos conceptos en mayor o menor medida según el problema estudiado. Esto resulta de gran interés porque en muchos casos se desea considerar ambos conceptos pero por las circunstancias del problema, puede que uno de ellos sea más relevante o se le quiera dar más relevancia.

La versión simple del operador POWA se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar se empieza con el paso previo, es decir, con el *immediate probabilistic OWA* (IP-OWA).

**Definición.** Un operador IPOWA es una función IPOWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  tal que:

$$IPOWA(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n v_j b_j, \quad (5)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ , cada argumento  $a_i$  tiene asociada una probabilidad  $v_i$  con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ ,  $v_j = \beta w_j + (1 - \beta)v_i$  y  $v_j$  es la probabilidad  $v_i$  ordenada según  $b_j$ , es decir, según el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ .

A continuación, se presenta la formulación que se considera en esta tesis como la unificación entre el operador OWA y la noción de probabilidad. A este operador se le denominará como el operador POWA o *probabilistic OWA*.

**Definición.** Un operador POWA es una función POWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  tal que:

$$POWA(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n v_j b_j, \quad (6)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ , cada argumento  $a_i$  tiene asociada una probabilidad  $v_i$  con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ ,  $v_j = \beta w_j + (1 - \beta)v_j$  con  $\beta \in [0, 1]$  y  $v_j$  es la probabilidad  $v_i$  ordenada según  $b_j$ , es decir, según el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ .

Obsérvese que este caso es mucho más completo ya que aparte de unificar al operador OWA y a las probabilidades, también permite introducirlos en la formulación en mayor o menor medida según el grado de importancia que se les quiera dar. Entonces, si  $\beta = 0$ , se obtiene estrictamente la probabilidad y si  $\beta = 1$ , se obtiene estrictamente el operador OWA.

Esta definición también puede expresarse de la siguiente forma.

**Definición.** Un operador POWA es una función POWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  y un vector de probabilidades  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$POWA = (a_1, \dots, a_n) = \beta \sum_{i=1}^n w_i b_i + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i a_i, \quad (7)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los argumentos  $a_i$  y  $\beta \in [0, 1]$ .

Como se puede observar, en este caso se da un tratamiento separado a ambos casos a través de utilizar una ponderación

simple que refleja la importancia de cada caso en el problema. En este caso también se observa que si  $\beta = 0$ , se obtiene la probabilidad y si  $\beta = 1$ , el operador OWA. También se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPOWA) y ascendentes (APOWA).

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones OWA o las probabilidades, es decir,  $W = \sum_{j=1}^n w_j \neq 1$ , o  $V = \sum_{i=1}^n v_i \neq 1$ , entonces, el operador POWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$POWA(a_1, \dots, a_n) = \frac{\beta}{W} \sum_{i=1}^n w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V} \sum_{i=1}^n v_i a_i. \quad (8)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$POWA(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j b_j, \quad (9)$$

$$\text{con } \hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta)v_j / V).$$

También se puede observar como el operador OWA cumple las propiedades de comutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia.

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida,  $\alpha(W)$ , el carácter atitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(\hat{P}) = \beta \sum_{j=1}^n w_j \binom{n-j}{n-1} + (1-\beta) \sum_{j=1}^n p_j \binom{n-j}{n-1}. \quad (10)$$

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones  $W$ . Se define como:

$$H(\hat{P}) = - \left( \beta \sum_{j=1}^n w_j \ln(w_j) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \right), \quad (11)$$

Como se puede observar, si  $\beta = 0$ , se obtiene la entropía de Shannon (1948) y si  $\beta = 1$ , la entropía de Yager (1988).

A través de utilizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones  $W$ , se pueden obtener diferentes casos particulares de operadores POWA. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes:

- El operador OWA ( $\beta = 1$ ).
- El operador de probabilidades ( $\beta = 0$ ).
- El máximo probabilístico ( $w_1 = 1$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq 1$ ).
- El mínimo probabilístico ( $w_n = 1$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq 1$ ).
- La media aritmética probabilística ( $w_j = 1/n$ , para todo  $b_i$  y  $v_i = 1/n$ , para todo  $a_i$ ).
- El POWA según el criterio de Hurwicz ( $w_1 = \alpha$ ,  $w_n = 1 - \alpha$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq 1, n$ ).
- El *step-POWA* ( $w_k = 1$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq k$ ).
- El *window-POWA* ( $w_j = 1/m$  para  $k \leq j \leq m - 1$  y  $w_j = 0$  para  $j > m$  y  $j < k$ ).
- El *olympic-POWA operator* ( $w_1 = w_n = 0$ , y para todos los demás  $w_j = 1/(n - 2)$ ).

- La mediana-POWA.
  - Si  $n$  es impar asignamos  $w_{(n+1)/2} = 1$  y  $w_j = 0$  para todos los demás.
  - Si  $n$  es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar  $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ , y  $w_j = 0$  para todos los demás.
- El *S-POWA* ( $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$ ,  $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$ , y  $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$  para  $j = 2$  hasta  $n - 1$  donde  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  y  $\alpha + \beta \leq 1$ )
- E-Z POWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna  $w_j = (1/k)$  para  $j = 1$  hasta  $k$  y  $w_j = 0$  para  $j > k$ .
  - 2) Se asigna  $w_j = 0$  para  $j = 1$  hasta  $n - k$  y  $w_j = (1/k)$  para  $j = n - k + 1$  hasta  $n$ .
- El *centered-POWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo) (Yager, 2007).
- El *nonmonotonic-POWA*.
- El *dependent-POWA*.

Y así sucesivamente, se podrían considerar un gran número de casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

Los operadores POWA pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que incorporemos en dicho operador. En este apartado se considerarán brevemente las siguientes extensiones:

- *Induced POWA operator*
- *Linguistic POWA operator*
- *Fuzzy POWA operator*
- *Generalized POWA operator*
- *POWA distance*

El *induced probabilistic OWA operator* o operador IPOWA, es un operador similar al POWA con la diferencia de que su proceso de ordenación no depende de los valores de los argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma.

**Definición.** Un operador IPOWA es una función IPOWA:  $R^n \times R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  tal que:

$$IPOWA \quad (\langle u_1, a_1 \rangle, \dots, \langle u_n, a_n \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j b_j, \quad (12)$$

donde  $\beta_j$  es el valor  $a_i$  del par *IPOWA* que tiene el  $j$ -ésimo más grande de los  $u_i$ ,  $u_i$  en  $\langle u_i, a_i \rangle$  hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento  $a_i$  tiene asociado una ponderación  $v_i$  con  $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta)v_j$  y  $v_i \in [0, 1]$ ,  $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta)v_j$  con  $\beta \in [0, 1]$  y  $v_j$  es la ponderación  $v_i$  ordenada según  $b_j$ , es decir, según el  $j$ -ésimo más grande de los  $u_i$ .

El *linguistic probabilistic OWA* (LPOWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas (Zadeh, 1975) en el operador POWA. Por tanto, este operador permite considerar al mismo tiempo el grado de optimismo y de importancia de una serie

de variables representadas mediante información lingüística. Se puede definir de la siguiente manera.

**Definición.** Un operador LPOWA es una función LPOWA:  $S^n \rightarrow S$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $w_i \in [0, 1]$  y un vector de ponderaciones  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$LPOWA(s_{X_1}, \dots, s_{X_n}) = \beta \sum_{j=1}^n w_j s_{Y_j} + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i s_{X_i}, \quad (13)$$

donde  $s_{Y_j}$  es el  $j$ -ésimo más grande de los  $s_{X_i}$ , y  $\beta \in [0, 1]$ .

Como se puede observar, si  $\beta = 0$ , se obtiene estrictamente el operador de probabilidades con información lingüística y si  $\beta = 1$ , se obtiene estrictamente el operador LOWA. Cabe destacar que esta es la formulación general, pero dentro de esta formulación, se podrían utilizar un gran número de diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o del externo.

El *fuzzy probabilistic OWA operator* o operador FPOWA (Merigó, 2011), es un operador POWA con la diferencia que la información incierta se representa mediante números borrosos (NBs). Se puede definir de la siguiente forma.

**Definición.** Sea  $\Psi$  el conjunto de los NBs. Un operador FPOWA es una función  $FPOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $w_i \in [0, 1]$  y un vector de probabilidades  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$FPOWA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i \tilde{a}_i, \quad (14)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los argumentos  $\tilde{a}_i$ , los  $\tilde{a}_i$  son NBs y  $\beta \in [0, 1]$ .

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo NBT, NBTP, NB generalizados, NB intervalo valorados y NB de tipo 2 y  $n$  (Zadeh, 2005; 2008). También es posible utilizar intervalos de confianza (Merigó y Wei, 2011; Moore, 1966).

El operador POWA puede ser generalizado mediante el uso de medias generalizadas o cuasi-aritméticas (Merigó et al. 2012a). De esta forma se consigue una formulación mucho más completa porque aparte de abarcar al operador POWA como un caso particular, se incluye a muchos otros casos como el operador POWA geométrico y el cuadrático. A esta generalización se la denominará como el *generalized probabilistic OWA operator* o el operador GPOWA, en el caso de que se utilicen medias generalizadas. Cuando se utilicen medias cuasi-aritméticas en este operador, se le denominará *Quasi-POWA operator*. Se define de la siguiente forma.

**Definición.** Un operador GPOWA es una función GPOWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $w_i \in [0, 1]$  y un vector de probabilidades  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$GPOWA(a_1, \dots, a_n) = \beta \left( \sum_{j=1}^n w_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \beta) \left( \sum_{i=1}^n v_i a_i^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (15)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los argumentos  $a_i \in [0, 1]$  y  $l$  es un parámetro tal que  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

Como se puede observar, si  $\beta = 0$ , se obtiene estrictamente la probabilidad generalizada y si  $\beta = 1$ , se obtiene estrictamente el operador GOWA. Los operadores GPOWA incluyen como casos particulares a un gran número de operadores de agregación probabilísticos de entre los cuales se destacan los siguientes:

- Si  $\lambda = 1$ , se obtiene el *POWA operator*.
- Si  $\lambda = 2$ , se obtiene el *probabilistic ordered weighted quadratic averaging (POWQA) operator*.
- Si  $\lambda \rightarrow 0$ , se obtiene el *probabilistic ordered weighted geometric averaging (POWGA) operator*.
- Si  $\lambda = -1$ , se obtiene el *probabilistic ordered weighted harmonic averaging (POWHA) operator*.

A continuación, se presenta un ejemplo numérico para poder observar el funcionamiento de los operadores POWA. Se desarrolla un ejemplo en la toma de decisiones (Figueira et al. 2005) en los procesos de selección de estrategias.

Supongamos que a una empresa que opera en Europa y América del Norte está considerando la posibilidad de expandirse a otro continente. Se le plantean 5 estrategias posibles.

- $A_1$ : Expandirse al mercado asiático.
- $A_2$ : Expandirse al mercado africano.
- $A_3$ : Expandirse al mercado sudamericano.
- $A_4$ : Expandirse a los 3 continentes.
- $A_5$ : No realizar ninguna expansión.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera de cada estrategia. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza  $S_k$  que podrían ocurrir en el futuro. Los resultados esperados para cada estrategia son los siguientes:

Tabla. Matriz de resultados esperados

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
$A_1$	60	60	50	10	50
$A_2$	40	10	80	70	40
$A_3$	60	40	60	20	80
$A_4$	30	40	60	20	90
$A_5$	50	70	30	60	60

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones  $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$  y el siguiente vector de probabilidades  $P = (0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1)$ . Se supone  $\beta = 0.4$ . En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la inversión más adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética, agregación probabilística (o valor esperado), operador OWA y POWA. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla. Resultados agregados

	Max	Min	AM	PA	OWA	POWA
$A_1$	60	10	46	52	41	47.6
$A_2$	80	10	48	42	41	41.6
$A_3$	80	20	52	52	46	49.6
$A_4$	90	20	48	44	41	42.8
$A_5$	70	30	54	54	50	52.4

Como se puede observar, se obtienen diferentes resultados según el método utilizado. Por tanto, esto puede llevar a que el decisor adopte diferentes decisiones según el método utilizado.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las estrategias. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que  $\preceq$  significa *preferido a*.

Tabla. Ordenación de las estrategias

	<i>Ordenación</i>		<i>Ordenación</i>
<i>Máximo</i>	$A_4 \setminus A_2 = A_3 \setminus A_5 \setminus A_1$	<i>PA</i>	$A_5 \setminus A_1 = A_3 \setminus A_4 \setminus A_2$
<i>Mínimo</i>	$A_5 \setminus A_3 = A_4 \setminus A_1 = A_2$	<i>OWA</i>	$A_5 \setminus A_3 \setminus A_1 = A_2 = A_4$
<i>AM</i>	$A_5 \setminus A_3 \setminus A_2 = A_4 \setminus A_1$	<i>POWA</i>	$A_5 \setminus A_3 \setminus A_1 \setminus A_4 \setminus A_2$

Como se puede observar según el tipo de agregación *POWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del inversor también.

Los operadores POWA también pueden ser utilizados en los métodos de distancias (Merigó et al. 2013). Entonces, se obtiene el *probabilistic ordered weighted averaging distance operator* o el operador POWAD. La gran ventaja que tiene es que permite agregar un problema de distancias con operadores OWA y probabilidades al mismo tiempo de tal forma que se refleja el grado de optimismo y la probabilidad en la misma formulación.

Además, la utilización de operadores POWAD puede ser considerado en un gran número de aplicaciones. En resumen, decir que todo concepto que utiliza el concepto de probabilidad es susceptible de ser analizada con el operador POWA. Obsérvese que en este caso, esto afectaría a los diferentes tipos de distancias existentes en la literatura como la distancia de Hamming, Euclides y Minkowski.

**Definición.** Un operador POWAD es una función POWAD:  $R^n \times R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  tal que:

$$POWAD \quad (P, P_k) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j D_j, \quad (16)$$

donde  $D_j$  representa el  $j$ -ésimo más grande de los  $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ ,  $\mu_i$  es la valuación en  $[0, 1]$  de la característica  $i$ -ésima de los elementos del conjunto ideal  $P$ ,  $\mu_i^{(k)}$  es la valuación en  $[0, 1]$  de la característica  $i$ -ésima de los elementos del conjunto  $k$ -ésimo considerado, cada argumento (distancia individual)  $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$  tiene asociada una probabilidad  $v_i$  con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ ,  $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta)v_j$  con  $\beta \in [0, 1]$  y  $v_j$  es la probabilidad  $v_i$  ordenada según  $D_j$ , es decir, según el  $j$ -ésimo más grande de los  $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ .

Entonces, si  $\beta = 0$ , se obtiene estrictamente la distancia probabilística y si  $\beta = 1$ , se obtiene estrictamente el operador OWAD.

El *generalized probabilistic OWA distance operator* o el operador GPOWAD es una generalización del operador POWAD a través de utilizar medias generalizadas o quasi-aritméticas. La gran ventaja que presenta es la posibilidad de ofrecer un caso mucho más completo que incluye a un gran número de distancias no incluidas en el operador POWAD. Se puede definir de la siguiente forma.

**Definición.** Un operador GPOWAD es una función GPOWAD:  $R^n \times R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$

y un vector de probabilidades  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$GPOWAD \quad (P, P_k) = \beta \left( \sum_{j=1}^n w_j D_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left( \sum_{i=1}^n v_i d_i^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (17)$$

donde  $D_j$  representa el  $j$ -ésimo más grande de los  $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ ,  $\mu_i$  es la valuación en  $[0, 1]$  de la característica  $i$ -ésima de los elementos del conjunto ideal  $P$ ,  $\mu_i^{(k)}$  es la valuación en  $[0, 1]$  de la característica  $i$ -ésima de los elementos del conjunto  $k$ -ésimo considerado,  $\beta \in [0, 1]$  y  $\lambda$  es un parámetro tal que  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .





## ❖ 4. UNIFICACIONES ENTRE OPERADORES OWA, MEDIAS PONDERADAS Y PROBABILIDADES

En este capítulo se analiza un nuevo modelo que permite unificar los conceptos de probabilidad, media ponderada y media ponderada ordenada, en una misma formulación superior a partir de la cual estos conceptos son casos particulares de adoptar una postura concreta en dicha formulación. En otras palabras, con esta formulación se pretende introducir los aspectos básicos de la auténtica formulación que describe a estos conceptos. A este operador se le denominará el *probabilistic ordered weighted averaging weighted averaging operator* o operador POWAWA (Merigó et al. 2012b). Por tanto, se puede observar que esta formulación demuestra que los operadores OWA, las medias ponderadas y las probabilidades, están englobadas dentro de un mismo contexto el cual puede adoptar distintas direcciones según lo que se esté analizando. Es decir, por ejemplo, cuando se analiza un problema de probabilidades, realmente, lo que se está haciendo es coger un caso particular del modelo y desarrollarlo. Al utilizar un caso particular, los resultados son satisfactorios (ejemplo de probabilidades) parcialmente, pero no reflejan todo el contexto del problema. Por ejemplo, al analizar probabilidades, se establecen predicciones de sucesos futuros pero se desconoce cuál será el resultado hasta que se produzca el suceso en cuestión. Por tanto, a la hora de establecer predicciones, además de establecer probabilidades, entran en juego otros conceptos como por ejemplo, el concepto de subjetividad (probabilidad o creencia subjetiva) expresado mediante medias ponderadas o el concepto de aversión al riesgo (grados de optimismo) expresado por el operador OWA. A partir de estos conceptos, los resultados obtenidos con la probabilidad objetiva se ven alterados según las circunstancias del problema

y los intereses del decisor, de tal forma que los resultados obtenidos se adecuen lo máximo posible al carácter del decisor.

El proceso de unificación de estos conceptos se cree que es el correcto y está bien encaminado para futuras investigaciones porque además de incluirlos en una misma formulación, permite representar en qué grado de importancia se quiere incluir a cada concepto en el problema. Por ejemplo, habrá problemas en donde se desee tener más en consideración a la probabilidad objetiva, en otros problemas a la probabilidad subjetiva y en otros casos al grado de optimismo del decisor. Entonces, esta formulación permitirá dar mayor o menor importancia a cada caso según su importancia en el problema. En términos generales, se puede decir lo siguiente en relación a cuándo se dará mayor importancia a cada caso:

- Probabilidades (objetivas): En las situaciones en las que se puedan hacer experimentos que permitan establecer información probabilística objetiva, se tendrá en cuenta este concepto. A mayor relevancia de estos experimentos en relación al establecimiento de predicciones del futuro mayor será la importancia de la probabilidad en la formulación general.
  - Por ejemplo, un caso extremo en donde se dará mayor importancia al concepto de probabilidad, sería el caso del lanzamiento de la moneda a cara o cruz. Esto se debe porque si después del experimento de lanzar la moneda el suficiente número de veces y comprobar que la moneda no está trucada y que por tanto el número de resultados cara prácticamente coincide con los de cruz, entonces, se tendrá una firme credibilidad de que la probabilidad de ocurrencia del próximo lanzamiento será del 50% cara y 50% cruz. Obviamente,

en estos casos se tendrá muy en cuenta la probabilidad objetiva aunque siempre pueden haber circunstancias excepcionales.

- Un caso extremo contrario en donde no se da mucha importancia a la probabilidad objetiva haría referencia a experimentos muy puntuales y que no son representativos del problema. Por ejemplo, un problema en el que sólo se dispone de un experimento que únicamente predice a una pequeña variable poco influyente del problema.
- Operadores OWA (grados de optimismo): Son de gran utilidad en aquellas situaciones en las que se desee modificar las predicciones obtenidas con las probabilidades según el grado de optimismo (o aversión al riesgo) del decisor. Este concepto está fuertemente relacionado con el concepto de utilidad. Es más, se puede decir que tanto el concepto de utilidad como el operador OWA, son conceptos similares vistos o utilizados desde perspectivas diferentes. Se cree que en el futuro se formularán modelos que mostrarán que estos dos conceptos forman parte de un esquema mucho más general que abarca a ambos casos como aspectos particulares del análisis de la aversión al riesgo o de la posibilidad de infravaloración o sobrevaloración del problema. A continuación, se muestra un ejemplo que expone la necesidad de utilizar operadores OWA (o aquel modelo general que unifica los operadores OWA con utilidades).

Supongamos 2 alternativas, con dos posibles situaciones con probabilidad de 0.5. La primera alternativa puede dar un beneficio de 1.000.000 de euros pero en el otro 50% puede dar 0. En cambio, la segunda alternativa garantiza un beneficio de 200.000 euros.

Utilizando los métodos clásicos de probabilidad, se obtendría:

$$0.5 \times 1000000 + 0.5 \times 0 = 500.000 \text{ euros}$$

$$0.5 \times 200000 + 0.5 \times 200000 = 200.000 \text{ euros}$$

Como se puede observar, la mayoría de la gente optaría por la opción 2. Entonces, queda claro que el uso únicamente del concepto de probabilidad resulta incompleto (o en este caso erróneo). Por tanto, se necesita una formulación adicional que describa este problema. En muchos estudios este problema se ha visto desde el punto de vista de la utilidad pero también se puede observar desde el punto de vista del operador OWA. Con este operador, se tendría que manipular la información dando un grado de optimismo del 20% a la información o de pesimismo del 80%. Entonces, los resultados serían los siguientes:

$$0.2 \times 1000000 + 0.8 \times 0 = 200.000 \text{ euros}$$

$$0.2 \times 200000 + 0.8 \times 200000 = 200.000 \text{ euros}$$

Por tanto, en este problema, utilizando únicamente el operador OWA, se concluye que para grados de optimismo superiores al 20%, se preferirá la alternativa 1. Mientras que para grados de optimismo por debajo del 20%, se preferirá la alternativa 2.

Ahora, vamos a analizar este mismo problema teniendo en cuenta que se dispone de una noción de probabilidad del 50% para ambos sucesos posibles. Entonces, se tendrá que recurrir al operador POWA explicado en el anterior capítulo. Por ejemplo, vamos a suponer que la información probabilística tiene una importancia en el problema del 10% y el

grado de optimismo del 90%. Siguiendo con la formulación del operador POWA se tendría lo siguiente. Como la segunda alternativa siempre va a dar 200.000 euros y las probabilidades objetivas son del 50%, se tiene que calcular el grado de optimismo de umbral, a partir del cual se preferirá una alternativa u otra. Se hará lo siguiente:

$$0.9 \times (\alpha \times 1000000 + (1 - \alpha) \times 0) + 0.1 \times (0.5 \times 1000000 + 0.5 \times 0) = 200.000.$$

$$\alpha = 0.166.$$

Es decir, el grado de optimismo a partir del cual se preferiría la alternativa 1 sería del 16.6%. Mientras que grados de optimismo inferiores a este resultado, llevarán a que se prefiera la alternativa 2.

Cabe destacar que si se da una importancia mayor del 40% a la parte probabilística, en este problema veríamos que es imposible que se prefiera la alternativa 2. Esto no es del todo correcto, visto desde la perspectiva de teoría de la decisión, porque falta lo que se ha comentado antes en relación a un esquema más general que también incluya a la noción de utilidad (o similar) en estos problemas. No obstante, cabe destacar que en una esquema general en el que sólo interviene la probabilidad, la media ponderada y el operador OWA, este modelo sí es correcto. El problema surge cuando se añaden otros conceptos en el problema como es el caso de teoría de la decisión donde implícitamente se encuentra en muchos casos la noción de utilidad. Pero en muchos problemas de teoría de la decisión en donde no interviene la utilidad y en muchos otros ámbitos como en la estadística, este modelo encaja a la perfección. Como se ha dicho, este modelo se tiene que ver como un primer paso unificado al que hay que

ir incorporando ingredientes en el futuro ya que resuelve un gran número de problemas, pero todavía no los resuelve todos como es el caso ante situaciones en donde interviene la utilidad. De forma simple, el problema de la utilidad se solucionaría sustituyendo los argumentos del objeto por utilidades de dichos argumentos.

- **Medias ponderadas (probabilidad subjetiva o grados de importancia):** Son de gran utilidad en aquellos problemas en donde no se dispone de mucha información probabilística objetiva o esta información es demasiado compleja como para establecer información fiable. En cambio, sí se dispone de ciertas creencias establecidas por personas con conocimiento del problema que indican cierta predicción hacia unos resultados determinados. También resulta de gran utilidad en aquellas circunstancias en las que se desea dar mayor importancia a ciertos aspectos del problema por las razones particulares que sean. Obsérvese que se podría analizar una problemática similar a la comentada anteriormente con el operador OWA. También cabe destacar la existencia de casos problemáticos como lo comentado con el operador POWA ante situaciones en donde se necesita utilizar otros conceptos adicionales como sería el caso de la noción de utilidad en teoría de la decisión.

Analizando la aplicabilidad de este modelo decir que se puede aplicar en muchos ámbitos como se observará en el capítulo sobre aplicabilidad de los operadores OWA en general. Pero hay dos aspectos a destacar.

En primer lugar, desde el punto de vista de teoría de la decisión se tiene que señalar el gran interés en continuar con esta formulación sobre el operador POWAWA a diferentes contextos que

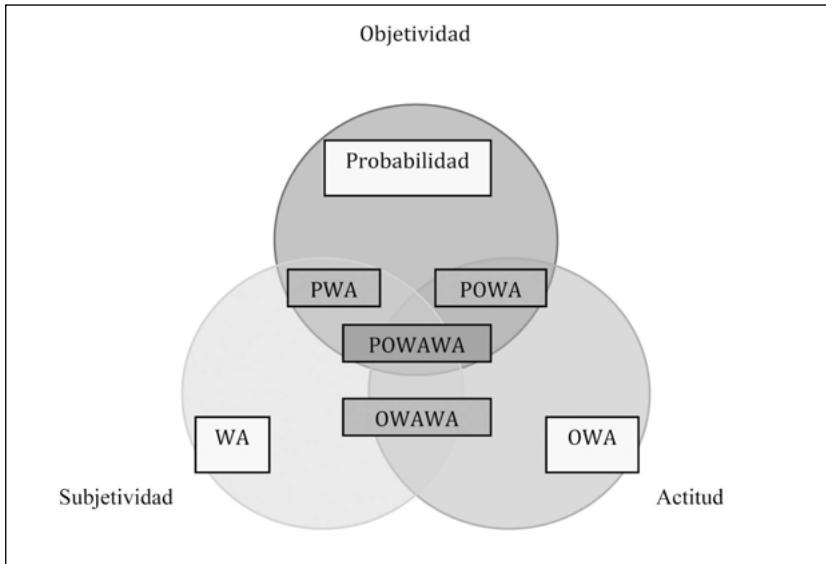
podrían implicar la introducción de los modelos de utilidad en dicha formulación, la introducción del *prospect theory* (Kahneman y Tversky, 1979), y muchas otras extensiones. Desde un punto de vista parcial, no parece muy complicado el introducir estas teorías o conceptos ya que simplemente consistiría en utilizarlos en la parte que les corresponde, ya sea en probabilidades, medias ponderadas u operadores OWA. Aun así en un esquema o formulación general, puede que resulte algo más complicado el obtener una unificación perfecta.

En segundo lugar y con carácter más general, destacar la posibilidad de desarrollar aplicaciones en diferentes ámbitos como los que se mencionan a continuación:

- En teoría de la decisión en general.
- En estadística en general.
- En economía y empresa.
- En teorías del *Soft Computing* y similar.
- En ingeniería en general.
- En matemáticas.
- Física.
- Química.
- Biología.
- Medicina.

Analizando esta unificación, se podría establecer un pequeño esquema que representa a esta unificación. Se podría decir que esta unificación se puede representar gráficamente de la siguiente forma:

Gráfica: Esquema de la unificación conseguida con el operador POWAWA



Como se puede observar, el operador POWAWA abarca a la probabilidad, al operador OWA y a la media ponderada. En la gráfica es la intersección de los 3 conceptos. También permite considerar diferentes casos particulares como es el caso del POWA (probabilidades y OWAs), el PWA (probabilidades y medias ponderadas) y el OWAWA (OWAs y WAs).

A continuación, se presenta la formulación y aspectos principales del operador POWAWA. Cabe destacar que su gran ventaja es el poder unificar a la probabilidad, a la media ponderada y al operador OWA en una misma formulación. De esta forma, se consigue una visión mucho más completa del proceso decisivo ya que se pueden considerar muchos más casos en la misma formulación.

**Definición.** Un operador POWAWA es una función POWAWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  tal que:

$$POWAWA (a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j b_j, \quad (18)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ , cada argumento  $a_i$  tiene asociada una ponderación  $v_i$  con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , una probabilidad  $p_i$  con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ ,  $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$ , con  $C_1, C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$ ,  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ , y  $v_j$  y  $p_j$  son las ponderaciones  $v_i$  y  $p_i$  ordenadas según  $b_j$ , es decir, según el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_i$ .

Obsérvese que esta definición también se podría presentar utilizando la siguiente formulación equivalente.

**Definición.** Un operador POWAWA es una función POWAWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $w_i \in [0, 1]$ , un vector de ponderaciones  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , y un vector de probabilidades  $P$ , con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$POWAWA (a_1, \dots, a_n) = C_1 \sum_{j=1}^n w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^n v_i a_i + C_3 \sum_{i=1}^n p_i a_i, \quad (19)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los argumentos  $a_i$  y  $C_1, C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$  con  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ .

Como se puede observar, la probabilidad, la media ponderada y el operador OWA, están incluidos en esta formulación como casos particulares de este modelo. A través de analizar los coeficientes  $C_1, C_2$  y  $C_3$ , se puede observar la importancia que tiene cada concepto en el problema.  $C_1$  hace referencia a la importancia del operador OWA.  $C_2$  a la importancia de la media

ponderada (WA). Y  $C_3$  a la importancia de la probabilidad en el problema. A mayor puntuación de uno de los coeficientes, mayor será la importancia de dicho concepto en el problema. En los casos extremos, se obtienen una serie de casos particulares de gran interés. Obsérvese que al incorporar medidas de distancia y medias generalizadas y quasi-aritméticas, se obtendrá una formulación general capaz de englobar a toda la tesis. Los casos particulares a destacar son los siguientes:

- Si  $C_1 = 1$ , se obtiene el operador OWA tradicional.
- Si  $C_2 = 1$ , se obtiene la media ponderada (WA) tradicional.
- Si  $C_3 = 1$ , se obtiene la probabilidad tradicional.
- Si  $C_1 = 0$ , se obtiene el *probabilistic weighted average* (PWA) (Merigó, 2012b).
- Si  $C_2 = 0$ , se obtiene el *probabilistic OWA* (POWA).
- Si  $C_3 = 0$ , se obtiene el *OWAWA operator* (Merigó, 2011b)

Además, también se podrían analizar estos casos particulares desde la perspectiva del operador POWAWA, es decir:

- El máximo ponderado probabilístico ( $w_1 = 1$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq 1$ ).
- El mínimo ponderado probabilístico ( $w_n = 1$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq n$ ).
- La media aritmética ( $w_j = 1/n$ , para todo  $b_i$ ,  $v_i = 1/n$ , para todo  $a_i$  y  $p_i = 1/n$ , para todo  $a_i$ ).
- La media aritmética probabilística ( $w_j = 1/n$ , para todo  $b_i$  y  $v_i = 1/n$ , para todo  $a_i$ ).
- La media aritmética ponderada ( $w_j = 1/n$ , para todo  $b_i$  y  $p_i = 1/n$ , para todo  $a_i$ ).

- La media aritmética OWA ( $v_i = 1/n$ , para todo  $a_i$  y  $p_i = 1/n$ , para todo  $a_i$ ).
- La media aritmética ponderada probabilística ( $w_j = 1/n$ , para todo  $b_j$ ).
- La media aritmética ponderada OWA ( $p_i = 1/n$ , para todo  $a_i$ ).
- La media aritmética probabilística OWA ( $v_i = 1/n$ , para todo  $a_i$ ).
- El POWAWA seg\xfcreo el criterio de Hurwicz Hurwicz ( $w_1 = \alpha$ ,  $w_n = 1 - \alpha$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq 1, n$ ).
- El *step-POWAWA* ( $w_k = 1$  y  $w_j = 0$ , para todo  $j \neq k$ ).
- El *window-POWAWA* ( $w_j = 1/m$  para  $k \leq j < k + m - 1$  y  $w_j = 0$  para  $j > k + m$  y  $j < k$ ).
- El *olympic-POWAWA operator* ( $w_1 = w_n = 0$ , y para todos los demás  $w_j = 1/(n - 2)$ ).
- La mediana-POWAWA.
  - Si  $n$  es impar asignamos  $w_{(n+1)/2} = 1$  y  $w_j = 0$  para todos los demás.
  - Si  $n$  es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar  $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ , y  $w_j = 0$  para todos los demás.
- El *S-POWAWA* ( $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$ ,  $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$ , y  $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$  para  $j = 2$  hasta  $n - 1$  donde  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  y  $\alpha + \beta \leq 1$ ).
- E-Z POWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna  $w_j = (1/k)$  para  $j = 1$  hasta  $k$  y  $w_j = 0$  para  $j > k$ .
  - 2) Se asigna  $w_j = 0$  para  $j = 1$  hasta  $n - k$  y  $w_j = (1/k)$  para  $j = n - k + 1$  hasta  $n$ .

- El *centered-POWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-POWAWA*.
- El *dependent-POWAWA*.

También cabe destacar que se podrían considerar otras formulaciones más amplias combinando otros métodos. Entonces, se establecería que  $\sum_{j=1}^n w_j \neq 1$  y  $C_h \in [0, 1]$ . Obviamente, la unificación que se presenta en esta tesis hace referencia a 3 conceptos de vital importancia que pueden recibir un tratamiento individualizado y ser unificados con esta formulación.

En relación al proceso de reordenación de argumentos, en especial en la primera definición, cabe destacar la posibilidad de distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante  $w_j = w_{n-j+1}^*$ , donde  $w_j$  es el  $j$ -ésimo coeficiente del *descending POWAWA (DPOWAWA)* y  $w_{n-j+1}^*$  el  $j$ -ésimo coeficiente del *ascending POWAWA (APOWAWA) operator*.

Otro aspecto a destacar es que si  $B$  es un vector que corresponde a los argumentos ordenados  $b_j$ , y  $W^T$  es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador POWAWA puede ser expresado como:

$$POWAWA(a_1, \dots, a_n) = W^T B. \quad (20)$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones OWA, el WA, o el de probabilidades, es decir,  $W = \sum_{j=1}^n w_j \neq 1$ , o  $V = \sum_{i=1}^n v_i \neq 1$ , o  $P = \sum_{i=1}^n p_i \neq 1$ , entonces, el operador POWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$POWAWA(a_1, \dots, a_n) = \frac{C_1}{W} \sum_{j=1}^n w_j b_j + \frac{C_2}{V} \sum_{i=1}^n v_i a_i + \frac{C_3}{P} \sum_{i=1}^n p_i a_i. \quad (21)$$

A continuación, se presenta un ejemplo numérico para observar el funcionamiento del operador POWAWA. Se analiza la toma de decisiones en procesos de selección de inversiones. Supongamos que a una empresa inversora se le plantean cinco posibles inversiones y se desea seleccionar aquella que mejor se adapta a sus necesidades.

- $A_1$ : invertir en una empresa de coches.
- $A_2$ : invertir en una empresa de televisores.
- $A_3$ : invertir en una empresa de ordenadores.
- $A_4$ : invertir en una empresa farmacéutica.
- $A_5$ : invertir en una empresa de comida.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada inversión pueda reportar a la empresa. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza  $S_k$  que podrían ocurrir en el futuro. Estos estados de la naturaleza van relacionados con la situación económica de la economía y dicen lo siguiente:  $S_1$  = Situación económica muy positiva,  $S_2$  = situación económica positiva,  $S_3$  = situación económica media,  $S_4$  = situación económica negativa y  $S_5$  = situación económica muy negativa. Los resultados esperados para cada inversión son los siguientes:

Tabla. Matriz de resultados esperados.

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
$A_1$	100	80	50	30	20
$A_2$	80	70	60	40	20
$A_3$	90	70	70	40	10
$A_4$	60	60	60	60	30
$A_5$	90	80	60	40	10

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones  $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$  para las ponderaciones OWA, el siguiente vector de ponderaciones para los grados de importancia o probabilidad subjetiva  $V = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3)$  y  $P = (0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1)$ . En este problema, se da una importancia del 50% a la probabilidad ( $C_3 = 0.6$ ), un 20% a la media ponderada o probabilidad subjetiva ( $C_2 = 0.2$ ) y 20% al operador OWA ( $C_1 = 0.2$ ). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la inversión más adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (AM), media ponderada (WA), OWA y probabilístico. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla. Resultados agregados con operadores POWAWA simples

	<i>Max</i>	<i>Min</i>	<i>AM</i>	<i>WA</i>	<i>OWA</i>	<i>Prob.</i>
$A_1$	100	20	56	43	48	64
$A_2$	80	20	54	45	48	60
$A_3$	90	10	56	45	48	64
$A_4$	60	30	54	51	51	57
$A_5$	90	10	56	44	48	64

A continuación, se va a estudiar otros tipos de agregaciones POWAWA mediante el uso de algunas de las familias

explicadas anteriormente. Se va a considerar el POWAWA y sus tres casos particulares principales, es decir, el PWA, el OWAWA y el POWA. Obsérvese que se tendrá que normalizar los coeficientes  $C$ . Para el PWA nos queda  $C_3 = 0.75$  y  $C_2 = 0.25$ . Para el OWAWA,  $C_2 = 0.5$  y  $C_1 = 0.5$ . Y para el POWA,  $C_3 = 0.75$  y  $C_1 = 0.25$ . Obsérvese que los vectores de ponderaciones surgidos de esta información son los siguientes:

- PWA = (0.25, 0.175, 0.2, 0.225, 0.15).
- OWAWA = (0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3).
- POWA = (0.25, 0.2, 0.2, 0.2, 0.15).
- POWAWA = (0.22, 0.18, 0.2, 0.22, 0.18).

Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores POWAWA son los siguientes:

Tabla. Resultados obtenidos con otros tipos de operadores POWAWA

	PWA	OWAWA	POWA	POWAWA
$A_1$	58.75	45.5	60	56.6
$A_2$	56.25	46.5	57	54.6
$A_3$	59.25	46.5	60	57
$A_4$	55.5	51	55.5	54.6
$A_5$	59	46	60	56.8

Como se puede observar, se obtienen diferentes resultados según el método utilizado. Esto puede llevar a que el decisor adopte diferentes decisiones según el método utilizado. Otro aspecto a destacar en la toma de decisiones es la elaboración de una ordenación de las inversiones. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de una inversión. Los resultados se muestran a continuación.

Tabla. Ordenación de las inversiones

<i>Ordenación</i>		<i>Ordenación</i>	
<i>Máximo</i>	$A_1 \setminus A_3 = A_5 \setminus A_2 \setminus A_4$	<i>Probabilidad</i>	$A_1 = A_3 = A_5 \setminus A_2 \setminus A_4$
<i>Mínimo</i>	$A_4 \setminus A_1 = A_2 \setminus A_3 = A_5$	<i>PWA</i>	$A_3 \setminus A_5 \setminus A_1 \setminus A_2 \setminus A_4$
<i>AM</i>	$A_1 = A_3 = A_5 \setminus A_2 = A_4$	<i>OWAWA</i>	$A_4 \setminus A_2 = A_3 \setminus A_5 \setminus A_1$
<i>WA</i>	$A_4 \setminus A_2 = A_3 \setminus A_5 \setminus A_1$	<i>POWA</i>	$A_1 = A_3 = A_5 \setminus A_2 \setminus A_4$
<i>OWA</i>	$A_4 \setminus A_1 = A_2 = A_3 = A_5$	<i>POWAWA</i>	$A_3 \setminus A_5 \setminus A_1 \setminus A_2 = A_4$

Como se puede observar según el tipo de agregación *POWAWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del inversor también.

Los operadores POWAWA pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que se incorporen en el operador. A modo de resumen, se considerarán las siguientes extensiones:

- *Induced POWAWA operator*
- *Linguistic POWAWA operator*
- *Fuzzy POWAWA operator*
- *Generalized POWAWA operator*
- *POWAWA distance*

El *induced POWAWA operator* o operador IPOWAWA (Merigó et al. 2012b), es un operador similar al POWAWA con la diferencia de que su proceso de ordenación de los argumentos no depende de los valores de dichos argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma.

**Definición.** Un operador IPOWAWA es una función IPOWAWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  tal que:

$$IPOWAWA (\langle u_1, a_1 \rangle, \dots, \langle u_n, a_n \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j b_j, \quad (22)$$

donde  $b_j$  es el valor  $a_i$  del par *IPOWAWA* que tiene el  $j$ -ésimo más grande de los  $u_i$ ,  $u_i$  en  $\langle u_i, a_i \rangle$  hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento  $a_i$  tiene asociado una ponderación  $v_i$  con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , una probabilidad  $p_i$  con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ ,  $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$ , con  $C_1, C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$ ,  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ , y  $v_j$  y  $p_j$  son las ponderaciones  $v_i$  y  $p_i$  ordenadas según  $b_j$ , es decir, según el  $j$ -ésimo más grande de los  $u_i$ .

Como se ha comentado para el operador POWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

**Definición.** Un operador IPOWAWA es una función IPOWAWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  y un vector de ponderaciones  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , y un vector de probabilidades  $P$ , con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$IPOWAWA (\langle u_1, a_1 \rangle, \dots, \langle u_n, a_n \rangle) = C_1 \sum_{j=1}^n w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^n v_i a_i + C_3 \sum_{i=1}^n p_i a_i, \quad (23)$$

donde  $b_j$  es el valor  $a_i$  del par *IPOWAWA* que tiene el  $j$ -ésimo más grande de los  $u_i$ ,  $u_i$  en  $\langle u_i, a_i \rangle$  hace referencia a la variable inducida de ordenación y  $C_1, C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$  con  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ .

En este caso, también se obtienen como casos particulares al operador OWA, a la media ponderada y a la probabilidad. La diferencia es que ahora el operador OWA está representado de una forma más completa a través de un proceso de reordenación más complejo que permite incluir muchos otros conceptos adicionales.

- Si  $C_1 = 1$ , se obtiene el operador IOWA tradicional.
- Si  $C_2 = 1$ , se obtiene la media ponderada (WA) tradicional.
- Si  $C_3 = 1$ , se obtiene la probabilidad tradicional.
- Si  $C_1 = 0$ , se obtiene el *probabilistic weighted average* (PWA).
- Si  $C_2 = 0$ , se obtiene el *induced probabilistic OWA* (IPOWA).
- Si  $C_3 = 0$ , se obtiene el *IOWAWA operator*.

También cabe destacar que se podrían considerar otras formulaciones más amplias combinando otros métodos. Entonces, se establecería que  $\sum_{h=1}^m C_h = 1$  y  $C_h \in [0, 1]$ .

El *linguistic POWAWA* (LPOWAWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador POWAWA. Por tanto, este operador permite considerar al mismo tiempo el grado de optimismo, información probabilística y la importancia de una serie de variables representadas por información lingüística. Se puede definir de la siguiente manera.

**Definición.** Un operador LPOWAWA es una función LPOWAWA:  $S^n \rightarrow S$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  y un vector de ponderaciones  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , y un vector de probabilidades  $P$ , con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$LPOWAWA (s_{X_1}, \dots, s_{X_n}) = C_1 \sum_{j=1}^n w_j s_{Y_j} + C_2 \sum_{i=1}^n v_i s_{X_i} + C_3 \sum_{i=1}^n p_i s_{X_i}, \quad (24)$$

donde  $s_{Y_j}$  es el  $j$ -ésimo más grande de los  $s_{X_i}$  y  $C_1, C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$  con  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ .

Cabe destacar que esta es la formulación general, pero dentro de esta formulación, se podrían utilizar un gran número de diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o del externo. Es decir, a partir del análisis interno (Herrera et al. 2008; Merigó et al. 2012c; 2013), tendríamos:

- Variables lingüísticas simples (con y sin representación interna).
- Variables lingüísticas basadas en 2-tuplas.
- Variables lingüísticas intervalo valoradas.
- Variables lingüísticas generalizadas (simples, 2-tuplas, intervalo valoradas, etc.).
- Variables lingüísticas de tipo 2 y  $n$ .
- Variables lingüísticas L-R (simples, generalizadas, etc.).
- Etc.

Por el otro lado, también se podrían utilizar variables lingüísticas procedentes del análisis externo. Es decir, se podrían utilizar:

- Intervalos de confianza lingüísticos.
- Números borrosos lingüísticos.
- NBT lingüísticos.
- NBTp lingüísticos.
- Números borrosos generalizados lingüísticos.

- Números borrosos intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos L-R lingüísticos (simples, generalizados y intervalo valorados).
- Números borrosos intuicionistas lingüísticos (simples, intervalo valorados, generalizados, etc.).
- Números borrosos generalizados intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos no convexos lingüísticos.
- Expertos lingüísticos (simples, cuádruplos, etc.).
- Etc.

En este caso, también se obtienen como casos particulares al operador OWA, a la media ponderada y a la probabilidad. La diferencia es que ahora estos conceptos analizan problemas en donde la información es incierta y viene representada por variables lingüísticas. Entonces, se obtienen los siguientes casos particulares.

- Si  $C_1 = 1$ , se obtiene el operador LOWA tradicional.
- Si  $C_2 = 1$ , se obtiene la media ponderada lingüística (LWA) tradicional.
- Si  $C_3 = 1$ , se obtiene la probabilidad en problemas lingüísticos.
- Si  $C_1 = 0$ , se obtiene el *linguistic probabilistic weighted average* (LPWA).
- Si  $C_2 = 0$ , se obtiene el *probabilistic LOWA* (PLOWA).
- Si  $C_3 = 0$ , se obtiene el *LOWAWA operator*.

También cabe destacar que se podrían considerar otras formulaciones más amplias combinando otros métodos. Entonces, se establecería que  $\sum_{h=1}^m C_h = 1$  y  $C_h \in [0, 1]$ .

El *fuzzy POWAWA operator* o operador FPOWAWA (Merigó et al. 2014), es un operador POWAWA pero con la diferencia de que la información se representa mediante NBs. Por lo demás, estos dos operadores son muy similares. Se puede definir de la siguiente forma.

**Definición.** Sea  $\Psi$  el conjunto de los NBs. Un operador FPOWAWA es una función  $FPOWAWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$ , un vector de ponderaciones  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , y un vector de probabilidades  $P$ , con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$FPOWAWA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = C_1 \sum_{j=1}^n w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^n v_i \tilde{a}_i + C_3 \sum_{i=1}^n p_i \tilde{a}_i, \quad (25)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los argumentos  $\tilde{a}_i$ , los  $\tilde{a}_i$  son NBs y  $C_1, C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$  con  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ .

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB (Dubois y Prade, 1980) como por ejemplo:

- Números borrosos triangulares
- Números borrosos trapezoidales
- Números borrosos intervalo valorados
- Números borrosos de tipo 2 y  $n$ .
- Números borrosos L-R
- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y  $n$  generalizados

- Números borrosos L-R (de tipo 2 y  $n$ , generalizados, etc.)

Como se puede observar, el operador FPOWAWA abarca como casos particulares a los siguientes operadores de agregación.

- Si  $C_1 = 1$ , se obtiene el operador FOWA tradicional.
- Si  $C_2 = 1$ , se obtiene la media ponderada borrosa (FWA) tradicional.
- Si  $C_3 = 1$ , se obtiene la probabilidad en problemas con información incierta representada mediante NBs.
- Si  $C_1 = 0$ , se obtiene el *fuzzy probabilistic weighted average* (FPWA).
- Si  $C_2 = 0$ , se obtiene el *probabilistic FOWA* (FPOWA).
- Si  $C_3 = 0$ , se obtiene el *FOWAWA operator*.

También resulta conveniente señalar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado por Kaufmann y Gil-Aluja (1986; 1987) y Kaufmann y Gupta (1985) para ordenar NBs en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones  $P$ ,  $W$  y  $V$  como NBs. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo. A modo de resumen.

Tabla. Combinaciones en el operador FPOWAWA

	$W$	$V$	Argumentos
Caso 1	-	-	Intervalos
Caso 2	-	Intervalos	Intervalos
Caso 3	Intervalos	-	Intervalos
Caso 4	Intervalos	Intervalos	-
Caso 5	Intervalos	Intervalos	Intervalos

Caso 6	Intervalos	Intervalos	NBs
Caso 7	NBs	NBs	Intervalos
Caso 8	NBs	NBs	NBs
Caso 9	-	-	NBs
Caso 10	-	NBs	-
Caso 11	NBs	NBs	-
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Además, se podrían buscar muchas más combinaciones si se considerasen otras técnicas para representar la información incierta como el uso de variables lingüísticas y expertones (Kaufmann y Gil-Aluja, 1993).

El operador POWAWA puede ser generalizado mediante el uso de medias generalizadas o quasi-aritméticas. Mediante el uso de medias generalizadas se le denominará el *generalized probabilistic OWAWA operator* o el operador GPOWAWA y mediante el uso de medias quasi-aritméticas, el *probabilistic Quasi-OWAWA operator* (Quasi-POWAWA). La gran ventaja de estas generalizaciones es que abarcan a muchos más casos que el operador POWAWA por lo que se consigue una formulación más general y completa que permite considerar muchas situaciones distintas en el mismo operador. Se puede definir de la siguiente forma.

**Definición.** Un operador GPOWAWA es una función GPOWAWA:  $R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$ , un vector de ponderaciones  $V$ , con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  y  $v_i \in [0, 1]$ , y un vector de probabilidades  $P$ , con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$GPOWAWA(a_1, \dots, a_n) = C_1 \left( \sum_{j=1}^n w_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + C_2 \left( \sum_{i=1}^n v_i a_i^\lambda \right)^{1/\lambda} + C_3 \left( \sum_{i=1}^n p_i a_i^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (26)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los argumentos  $a_i$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$  con  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$  y  $l$  es un parámetro tal que  $l \in (-\infty, \infty)$ .

En este caso, se obtienen los siguientes casos particulares:

- Si  $C_1 = 1$ , se obtiene el operador GOWA tradicional.
- Si  $C_2 = 1$ , se obtiene la media ponderada generalizada (GWA) tradicional.
- Si  $C_3 = 1$ , se obtiene la probabilidad generalizada.
- Si  $C_1 = 0$ , se obtiene el *generalized probabilistic weighted average* (GPWA).
- Si  $C_2 = 0$ , se obtiene el *probabilistic GOWA* (PGOWA).
- Si  $C_3 = 0$ , se obtiene el *GOWAWA operator*.

También se pueden distinguir diferentes casos particulares procedentes del parámetro  $l$ .

- Si  $l = 1$ , se obtiene el *POWAWA operator*.
- Si  $l = 2$ , se obtiene el *probabilistic ordered weighted quadratic averaging weighted averaging* (POWQAWA) operator.
- Si  $l = 0$ , se obtiene (por aproximación) el *probabilistic ordered weighted geometric averaging weighted averaging* (POWGAWA) operator.
- Si  $l = -1$ , se obtiene el *probabilistic ordered weighted harmonic averaging weighted averaging* (POWHAWA) operator.

Los operadores POWAWA también pueden ser utilizados en los métodos de distancias. Entonces, se obtiene el *probabilistic ordered weighted averaging weighted averaging distance operator* o operador POWAWAD. La gran ventaja que tiene es que permi-

te agregar un problema de distancias con operadores OWA, WA y probabilidades al mismo tiempo de tal forma que se refleja el grado de optimismo, el grado de importancia y la probabilidad en la misma formulación. Con el operador POWAWAD se consigue una formulación mucho más general a los métodos de distancias, lo cual permite mostrar un abanico mucho más amplio de resultados según los intereses del problema.

Además, la utilización de operadores POWAWAD puede ser considerado en un gran número de aplicaciones como se mostrará en el capítulo de aplicabilidad de los operadores OWA ya sea en diferentes aspectos estadísticos o en otras áreas de la ciencia. En resumen, decir que todo concepto que utiliza la noción de media (en especial media ponderada) es susceptible de ser analizada con el operador POWAWA. Obsérvese que en este caso, esto afectaría a los diferentes tipos de distancias existentes en la literatura como la distancia de Hamming, Euclides y Minkowski, entre otros (Merigó y Casanovas, 2011b; Merigó y Gil-Lafuente, 2012). A continuación, se presenta el operador POWAWAD.

**Definición.** Un operador POWAWAD es una función  $POWAWAD: R^n \times R^n \rightarrow R$  de dimensión  $n$ , si tiene un vector de ponderaciones  $W$  asociado, con  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  y  $w_j \in [0, 1]$  tal que:

$$POWAWAD(P, P_k) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j D_j, \quad (27)$$

donde  $D_j$  representa el  $j$ -ésimo más grande de los  $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ ,  $\mu_i$  es la valuación en  $[0, 1]$  de la característica  $i$ -ésima de los elementos del conjunto ideal  $P$ ,  $\mu_i^{(k)}$  es la valuación en  $[0, 1]$  de la característica  $i$ -ésima de los elementos del conjunto  $k$ -ésimo considerado, cada argumento (distancia individual)  $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$  tiene asociado una ponderación  $v_i$  con  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$

y  $v_i \in [0, 1]$ , una probabilidad  $p_i$  con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ ,  $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$ , con  $C_1, C_2$  y  $C_3 \in [0, 1]$ ,  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ ,  $v_j$  y  $p_j$  son las ponderaciones  $v_i$  y  $p_i$  ordenadas según  $D_j$ , es decir, según el  $j$ -ésimo más grande de los  $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ .

Cabe destacar la existencia de los siguientes casos particulares.

- Si  $C_1 = 1$ , se obtiene el operador OWAD (Merigó y Gil-Lafuente, 2007; 2010).
- Si  $C_2 = 1$ , se obtiene la distancia de Hamming ponderada.
- Si  $C_3 = 1$ , se obtiene la distancia probabilística.
- Si  $C_1 = 0$ , se obtiene el *probabilistic weighted averaging distance* (PWAD) (Merigó, 2013).
- Si  $C_2 = 0$ , se obtiene el *probabilistic OWAD* (POWAD).
- Si  $C_3 = 0$ , se obtiene el *OWAWAD operator*.



## ❖ 5. APLICABILIDAD DE LOS OPERADORES OWA

La aplicabilidad de los operadores OWA en los métodos de gestión empresarial es muy amplia, en especial, en situaciones de decisión empresarial. La gran ventaja de poder utilizar los operadores OWA es la posibilidad de diseñar unos mecanismos de decisión que reflejan el grado de optimismo del decisor. De esta forma, el decisor puede tomar decisiones en función de sus intereses y sin tener que recurrir a mecanismos objetivos.

Además, cabe tener en consideración las ventajas de utilizar toda la amplia gama de extensiones a los operadores OWA propuestos en este trabajo. En estas extensiones, se añaden toda una serie de conceptos que permiten un mejor tratamiento de dichos problemas, ya sea mediante el uso de un modelo más generalizado, distancias, la media ponderada o probabilidades.

A modo de resumen, podemos decir que la aplicabilidad de los OWA afecta a toda la empresa y puede proporcionar modelos de gestión en diferentes problemas como:

- Gestión financiera (Gil-Aluja, 1997; A.M. Gil-Lafuente, 2001)
- Gestión comercial (J. Gil-Lafuente, 1997)
- Gestión estratégica
- Gestión de recursos humanos (Gil-Aluja, 1996)
- Gestión de la producción
- Gestión deportiva (J. Gil-Lafuente, 2002)
- Gestión general (Gil-Aluja, 2001; Kaufmann y Gil-Aluja, 1986)

Al analizar estos problemas, se pueden considerar diferentes procesos de decisión (Gil-Aluja, 1999) como son:

- Las decisiones en sentido amplio
  - Decisiones individuales
  - Decisiones de grupo
  - Decisiones secuenciales
- Los procesos de asignación
  - Con decisión individual
  - Con decisión de grupo
- Los procesos de agrupación
  - Con decisión individual
  - Con decisión de grupo
- Los procesos de ordenación
  - Con decisión individual
  - Con decisión de grupo

A su vez, no se tiene que olvidar la posibilidad de utilizar una amplia gama de instrumentos para el tratamiento de la incertidumbre en dichos problemas (Kaufmann, 1975; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987) como son:

- Los intervalos de confianza
  - Tripletas
  - Cuádruplos
  - Quíntuplos
- Los números borrosos
  - Números borrosos triangulares
  - Números borrosos trapezoidales
  - Números borrosos intervalo valorados
  - Números borrosos de tipo 2 y  $n$ .
  - Números borrosos L-R

- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y  $n$  generalizados
- Números borrosos L-R (de tipo 2 y  $n$  y generalizados)
- Las variables lingüísticas
  - Variables lingüísticas simples
    - Sin representación interna
    - Representación interna mediante números borrosos
    - Con conjuntos de términos lingüísticos continuos
  - Variables lingüísticas basadas en 2-tuplas
    - Versión original
    - Versión combinada con computación directa con palabras
  - Variables lingüísticas generalizadas
    - Simples
    - De 2-tuplas
  - Variables lingüísticas intervalo valoradas
  - Variables lingüísticas intervalo valoradas generalizadas (simples y de 2-tuplas)
  - Variables lingüísticas de tipo 2 y  $n$  (simples, 2-tuplas y generalizadas)
  - Variables lingüísticas L-R (simples, generalizadas y de tipo 2 y  $n$ )
- Los expertones
  - Simples
  - m-expertones
  - R-expertones
  - El contraexpertizaje
    - Con expertones simples
    - Con m-expertones
    - Con R-expertones
- Etc.

Cabe destacar que sólo se mencionarán algunas de las posibles aplicaciones ya que el número de aplicaciones posibles es ilimitado.

Los operadores OWA son unas técnicas de gran utilidad en la teoría de la decisión. Se pueden implementar en diferentes contextos decisionales. A modo de ejemplo, se podrían destacar los siguientes métodos de decisión (Torra y Narukawa, 2007; Triantaphyllou, 2001).

- La teoría de la evidencia (Dempster, 1967; Shafer, 1976; Yager, 1992)
- El método de minimización del coste (Savage, 1951)
- El AHP (Saaty, 1980)
- El TOPSIS
- Las decisiones de grupo
- Las decisiones secuenciales
- La utilidad
- Los procesos de asignación
- Los procesos de agrupación

En términos generales, en estos métodos se podrían utilizar diferentes tipos de operadores OWA como por ejemplo:

- *OWA operator*
- *IOWA operator*
- *HOWA operator*
- *GOWA operator*
- *OWAD operator*
- *GOWAD operator*
- *OWAWA operator*
- *GOWAWA operator*

- *OWAWAD operator*
- *GOWAWAD operator*
- *POWA operator*
- *POWAWA operator*
- Etc.

La aplicabilidad de los operadores OWA es increíblemente amplia. A modo de resumen, se puede decir que son aplicables a cualquier problema que utilice medias aritméticas o ponderadas. En otras palabras, se podría establecer el siguiente enunciado o proposición:

*“La aplicabilidad de los operadores OWA y de la incertidumbre en general es ilimitada”*

Por tanto, conscientes de que la aplicabilidad es ilimitada, se llega a la conclusión de que únicamente se podrá conocer todas las posibles aplicaciones en grandes rasgos. De aquí, se podría establecer el siguiente enunciado:

*“Debido a que la aplicabilidad de los operadores OWA y de la incertidumbre en general es ilimitada, sólo se podrán conocer estas teorías en grandes rasgos”*

También es conveniente destacar que este enunciado es extensible a muchas especializaciones ya sea de los operadores OWA o del mundo *fuzzy* (incertidumbre) en general por el hecho de que la propia noción de incertidumbre es ilimitada.

A modo de resumen, estos son algunos de los principales enunciados que se pueden establecer sobre la aplicabilidad de los operadores OWA y del mundo *fuzzy* en general. Obviamente, se podrían establecer muchos más, pero hemos mencionado aquellos que consideramos de gran relevancia.

Al ser el operador OWA una técnica estadística de gran utilidad en teoría de la decisión, se puede ver que inicialmente una parte importante de las aplicaciones irán en esta dirección. Al analizar aplicaciones en la estadística, se podrían considerar todo tipo de aplicaciones en donde se utilizan los conceptos de media aritmética y ponderada. Por ejemplo, se podrían destacar los problemas de:

- Temas *fuzzy* o similar
- Estadística descriptiva
- Modelos de regresión
- Inferencia estadística
- Estadística teórica
- Aspectos econométricos
- Temas actuariales
- Económicos
- Matemáticos
- Físicos
- Químicos
- Biológicos

Y así sucesivamente, se podrían ir buscando y desarrollando muchas otras aplicaciones (Belles et al. 2013). Por tanto, en este trabajo hemos abierto un poco más las puertas para que la comunidad científica tenga un conocimiento mucho mayor de los operadores OWA, de sus extensiones y del mundo de la incertidumbre en general. Pero todavía queda mucho por hacer en el futuro.



## ❖ 6. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo que unifica el operador OWA con la noción de probabilidad. De esta forma se obtiene una formulación que abarca como casos particulares al operador OWA y a la probabilidad. Se le ha denominado como el operador POWA y la gran ventaja que presenta es la posibilidad de considerar en un mismo problema el grado de optimismo del decisor y la información probabilística. Esta unificación también de la sensación de ser el inicio del camino correcto a seguir en el futuro ya que además de unificar ambos conceptos, permite incluirlos según el grado de importancia que se les quiera dar de tal forma que los casos extremos serían el operador OWA y la probabilidad propiamente dicho.

Cabe destacar la existencia de un modelo denominado como *immediate probability* (Engemann et al. 1996; Merigó, 2010; Yager et al. 1995) que representa un primer paso previo al modelo presentado en este capítulo. También cabe la posibilidad de extender el operador WOWA y HA a problemas probabilísticos ya que simplemente sería interpretar la media ponderada como la probabilidad. El operador POWA ha sido extendido mediante el uso de algunos conceptos fundamentales como es el IPOWA, LPOWA, FPOWA, GPOWA y POWAD. Existen muchas otras posibles extensiones pero en este trabajo se ha proporcionado simplemente un esquema general.

A continuación, se ha propuesto un modelo todavía más general que incluye a todos los otros grandes conceptos como casos particulares. Se trata del operador POWAWA. Es un operador que unifica a la probabilidad, a la media ponderada y al operador OWA en la misma formulación, de tal forma que estos conceptos son casos particulares de esta estructura superior. La

gran ventaja que ofrece es la posibilidad de incluir estos casos en este modelo general de tal forma que se pueden analizar los problemas utilizando probabilidades, medias ponderadas y operadores OWA. Esta unificación también se muestra bastante flexible lo cual da la sensación de ser el camino a seguir en el futuro ya que además de unificarlos, permite incluirlos en mayor o menor medida según la información disponible o los intereses del análisis. También resulta de interés el observar que en los casos extremos se obtiene el operador OWA, la media ponderada y la probabilidad. Además, también tiene otros casos intermedios de gran interés como son el operador POWA, el OWAWA y el PWA.

En este caso también se han presentado algunas extensiones representativas como son el IPOWAWA, el LPOWAWA, el FPOWAWA, el GPOWAWA y el POWAWAD. Estos operadores proporcionan una representación más completa de la información que se adapta a una gran variedad de imprecisiones y complejidades.

En el último capítulo se analiza la aplicabilidad de los operadores OWA y se sugieren distintas aplicaciones posibles a desarrollar en el futuro. La principal conclusión a la que se llega en este capítulo es que la aplicabilidad de los operadores OWA y de la incertidumbre en general es ilimitada. Debido a ello, el número de aplicaciones que se podrían realizar es incalculable. Por tanto, se ha presentado un resumen desde la perspectiva de los métodos de decisión y distintos problemas empresariales. Aun así, también se menciona la posibilidad de realizar aplicaciones en otros ámbitos de la ciencia como en la estadística y en la física.

Las conclusiones generales de esta presentación se pueden resumir diciendo que “*se ha aportado un elevado número de nuevos*

*operadores OWA y nuevas formulaciones generales en combinación con otros grandes conceptos como la probabilidad, la media ponderada y la noción de distancia”.*

Entrando un poco más en detalle se podría decir que las grandes aportaciones han sido las siguientes:

- Elaboración de nuevas extensiones a los operadores OWA en su versión más simplificada.
- Unificación del operador OWA con la probabilidad y desarrollo de diferentes extensiones y generalizaciones.
- Unificación entre la probabilidad, la media ponderada y el operador OWA, y elaboración de diferentes extensiones y generalizaciones.
- Elaboración esquemática de un gran número de posibles aplicaciones en diferentes problemas empresariales y en diferentes métodos de decisión.

En este discurso se han presentado un elevadísimo número de nuevos operadores OWA procedentes de diferentes extensiones o generalizaciones. Pero aún queda mucho por hacer y se pueden desarrollar muchos otros tipos de operadores OWA. Una línea a la cual se dará importancia es a seguir con el proceso de unificación no sólo del operador OWA sino también de la media ponderada y de la probabilidad. En este ámbito se estudiará el uso de la noción de utilidad y otros conceptos próximos como las medias móviles (Merigó y Yager, 2013) a partir de los cuales se tratará de diseñar una mejor teoría de la decisión.

Esta línea de investigación también se desarrollará mediante la elaboración de nuevas aplicaciones de los operadores OWA en diferentes métodos de decisión como en la teoría de la evidencia, en la minimización del coste, en el AHP, en el TOPSIS, en las decisiones de grupo, en las decisiones secuenciales y en los

procesos de asignación y agrupación. También se considerarán diferentes aplicaciones posibles en diferentes ámbitos, dando especial relevancia a los problemas empresariales como son los problemas de gestión de inversiones, estrategias, finanzas, recursos humanos, productos en general, otros problemas empresariales, otros problemas decisionales ya sean de tipo político, económico o personal.

También se tienen que destacar las aportaciones en otras ramas de la ciencia diferentes de la teoría de la decisión, en especial, en la estadística. Se espera que en el futuro se puedan desarrollar algunas aportaciones en la estadística con el diseño de algunas técnicas estadísticas nuevas mediante el uso de diferentes tipos de operadores OWA. Y se puede prever que en el futuro cada vez irán apareciendo más aportaciones en este ámbito y no sólo en la estadística sino que en diferentes ramas de la ciencia en general, ya sea en la física, la química o la medicina.



## BIBLIOGRAFIA

- G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation functions: A guide for practitioners*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- J. Belles-Sampera, J.M. Merigó, M. Guillén, M. Santolino, The connection between distortion risk measures and ordered weighted averaging operators, *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2) (2013) 411-420.
- T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation operators: New trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.
- A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Annals of Mathematical Statistics* 38 (1967) 325-339.
- D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*, Academic Press, New York, 1980.
- K.J. Engemann, D.P. Filev, R.R. Yager, Modeling decision making using immediate probabilities, *International Journal of General Systems* 24 (1996) 281-294.
- J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*, Springer, Boston, 2005.
- J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3 (1995) 236-240.
- J. Gil-Aluja, *La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1996.
- J. Gil-Aluja, *Invertir en la incertidumbre*, Ed. Pirámide, Madrid, 1997.
- J. Gil-Aluja, *Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre*, Ed. Milladoiro, Vigo, 1999.

- J. Gil-Aluja, *Handbook of management under uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- A.M. Gil-Lafuente, *Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*, Ariel Economía, Barcelona, 2001.
- J. Gil-Lafuente, *Marketing para el nuevo milenio: nuevas técnicas para la gestión comercial en la incertidumbre*, Ed. Pirámide, Madrid, 1997.
- J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.
- F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (2008) 354-370.
- F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach, *Information Sciences* 85 (1995) 223-239.
- F. Herrera, L. Martínez, A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8 (2000) 746-752.
- L. Hurwicz, Optimality criteria for decision making under ignorance, *Cowles Communication Discussion Paper*, Statistics No. 370, 1951.
- D. Kahneman, A. Tversky, Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica* 47 (1979) 263-292.N. Karayiannis, Soft learning vector quantization and clustering algorithms based on ordered weighted aggregation operators, *IEEE Transactions on Neural Networks* 11 (2000) 1093-1105.
- A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.

- A. Kaufmann, J. Gil Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, 1986.
- A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.
- A. Kaufmann, J. Gil Aluja, *Técnicas especiales para la gestión de expertos*, Ed. Milladoiro, 1993.
- A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold, 1985.
- J.M. Merigó, Fuzzy decision making using immediate probabilities, *Computers & Industrial Engineering* 58 (2010) 651-657.
- J.M. Merigó, Fuzzy multi-person decision making with fuzzy probabilistic aggregation operators, *International Journal of Fuzzy Systems* 13 (2011a) 163-174.
- J.M. Merigó, A unified model between the weighted average and the induced OWA operator, *Expert Systems with Applications* 38 (2011b) 11560-11572.
- J.M. Merigó, Probabilities with OWA operators, *Expert Systems with Applications* 39 (2012a) 11456-11467.
- J.M. Merigó. The probabilistic weighted average and its application in multi-person decision making, *International Journal of Intelligent Systems* 27 (2012b) 457-476.
- J.M. Merigó, The probabilistic weighted averaging distance and its application in group decision making, *Kybernetes* 42 (2013) 686-697.
- J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making, *Cybernetics & Systems* 41 (2010) 359-370.

- J.M. Merigó, M. Casanovas, The uncertain induced quasi-arithmetic OWA operator, *International Journal of Intelligent Systems* 26 (2011a) 1-24.
- J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with distance measures and induced aggregation operators, *Computers & Industrial Engineering* 60 (2011b) 66-76.
- J.M. Merigó, M. Casanovas, K.J. Engemann, Group decision making with generalized and probabilistic aggregation operators, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* 8 (2012a) 4823-4835.
- J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The ordered weighted averaging distance operator, *Lectures on Modelling and Simulation* 8 (2007) 1-11.
- J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, *Information Sciences* 179 (2009) 729-741.
- J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, New decision-making techniques and their application in the selection of financial products, *Information Sciences* 180 (2010) 2085-2094.
- J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Decision making techniques with similarity measures and OWA operators, *SORT – Statistics and Operations Research Transactions* 36 (2012) 81-102.
- J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Induced 2-tuple linguistic generalized aggregation operators and their application in decision-making, *Information Sciences* 236 (2013) 1-16.
- J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, D. Palacios-Marqués, A new method for fuzzy decision making under risk and uncertainty, *International Journal of Business Continuity and Risk Management* 5 (2014) 29-42.
- J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, L.G. Zhou, H.Y. Chen, Induced and linguistic generalized aggregation operators

- and their application in linguistic group decision making, *Group Decision and Negotiation* 21 (2012c) 531-549.
- J.M. Merigó, C. Lobato-Carral, A Carrilero-Castillo, Decision making in the European Union under risk and uncertainty, *European Journal of International Management* 6 (2012b) 590-609.
- J.M. Merigó, G.W. Wei, Probabilistic aggregation operators and their application in uncertain multi-person decision making, *Technological and Economic Development of Economy* 17 (2011) 335-351.
- J.M. Merigó, Y.J. Xu, S.Z. Zeng, Group decision making with distance measures and probabilistic information, *Knowledge-Based Systems* 40 (2013) 81-87.
- J.M. Merigó, R.R. Yager, Generalized moving averages, distance measures and OWA operators, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 21 (2013) 533-559.
- R. E. Moore, *Interval analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1966.
- T.L. Saaty, *The analytic hierarchy process*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- L.J. Savage, The theory of statistical decision, *Journal of American Statistical Association* 46 (1951) 55-67.
- G.A. Shafer, *Mathematical theory of evidence*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
- C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, *The Bell System Technical Journal* 27 (1948) 379-423.
- V. Torra, The weighted OWA operator, *International Journal of Intelligent Systems* 12 (1997) 153-166.

- V. Torra, Y. Narukawa, *Modelling decisions: Information fusion and aggregation operators*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2007.
- E. Triantaphyllou, *Multi-criteria decision making methods: A comparative study*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- A. Wald, *Statistical decisions functions*, Wiley, New York, USA, 1950.
- Z.S. Xu, EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 12 (2004a) 791-810.
- Z.S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, *Information Sciences* 166 (2004b) 19-30.
- Z.S. Xu, Q.L. Da, The uncertain OWA operator, *International Journal of Intelligent Systems* 17 (2002) 569-575.
- Z.S. Xu, Q.L. Da, An overview of operators for aggregating information, *International Journal of Intelligent Systems* 18 (2003) 953-969.
- R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18 (1988) 183-190.
- R.R. Yager, Decision making under Dempster-Shafer uncertainties, *International Journal of General Systems* 20 (1992) 233-245.
- R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59 (1993) 125-148.
- R.R. Yager, On the inclusion of variance in decision making under uncertainty, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 4 (1995) 401-419.

- R.R. Yager, Heavy OWA operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 1 (2002) 379-397.
- R.R. Yager, Induced aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems* 137 (2003) 59-69.
- R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, *International Journal of Approximate Reasoning* 36 (2004a) 109-128.
- R.R. Yager, Generalized OWA aggregation operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 3 (2004b) 93-107.
- R.R. Yager, Generalizing variance to allow the inclusion of decision attitude in decision making under uncertainty, *International Journal of Approximate Reasoning* 42 (2006) 137-158.
- R.R. Yager, Centered OWA operators, *Soft Computing* 11 (2007) 631-639.
- R.R. Yager, K.J. Engemann, D.P. Filev, On the concept of immediate probabilities, *International Journal of Intelligent Systems* 10 (1995) 373-397.
- R.R. Yager, D.P. Filev, Induced ordered weighted averaging operators, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics B* 29 (1999) 141-150.
- R.R. Yager, J. Kacprzyk, *The ordered weighted averaging operators: Theory and applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
- R.R. Yager, J. Kacprzyk, G. Beliakov, Recent developments on the ordered weighted averaging operators: Theory and practice, Springer, Berlin, 2011.
- L.A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and control* 8 (1965) 338-353.

L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning 1, *Information Sciences* 8 (1975) 199-249.

L.A. Zadeh, Toward a generalized theory of uncertainty (GTU) – an outline, *Information Sciences* 172 (2005) 1-40.

L.A. Zadeh, Is there a need for fuzzy logic? *Information Sciences* 178 (2008) 2751-2779.



# **Discurs de contestació**

**Excm. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera**



Excm. Sr. President,  
Dres. i Drs. Acadèmics,  
Senyores i senyors:

**1. Preàmbul.** La Reial Acadèmia de Doctors, un cop més, es guarneix amb les millors gales per rebre un nou acadèmic numerari, l'Excm. Sr. Dr. Josep Maria Merigó i Lindahl.

No fa gaire, en la seva resposta, l'Excm. Sr. Dr. Santiago Dexeus Trias de Bes es permetia de fer un retret, amigable és clar, a l'Excm. Sr. President d'aquesta corporació pel fet d'haver-li encomanat la responsabilitat de la resposta a un nou acadèmic en l'acte solemne d'acollida. I, si bé entenc perfectament el sentiment de preocupació que aquesta responsabilitat comporta, em permeto discrepar, també amigablement, d'aquell retret.

El fet que la Reial Acadèmia encomani a un dels seus membres numeraris la resposta a un membre nou és, en efecte, una responsabilitat molt gran, —i àdhuc pot resultar feixuga— atès que els acadèmics que ingresen a la nostra Reial Corporació són estudiosos, erudits, professionals, pensadors, científics, humanistes, intel·lectuals d'un prestigi enorme, i la resposta no pot, en cap cas, desmerèixer ni la seva vàlua ni tampoc el prestigi d'aquesta institució que els acull.

Però alhora palesa la confiança que la Reial Acadèmia, per mitjà de l'equip de Govern, diposita en la persona designada; i així ho vull entendre perquè, de fet, amb les meves paraules, és ella, la Reial Acadèmia de Doctors, la qui respon al teu magnífic i especialitzat discurs d'ingrés —*La media ponderada ordenada probabilística: Teoría y aplicaciones*— i per la qual, ja des d'ara mateix, en nom seu, et felicito.

És per aquesta raó que, d'entrada, vull agrair a l'Excm. Sr. President i a l'Excma. Sra. Vice-presidenta la confiança que m'han atorgat en encomanar-me aquesta responsabilitat.

**2. Currículum.** La vàlua intel·lectual i científica del Dr. Josep M. Merigó i Lindahl —com palesa el seu extens currículum— és indiscutible. És, per a mi, una tasca molt delicada resumir-lo en unes poques línies sense que la seva gran qualitat —com a especialista en l'àmbit de l'estudi dels mètodes quantitatius (i, a voltes, qualitatius) de sistemes de presa de decisions en condicions d'incertesa i/o de risc— en resulti mermada

Josep M. es formà a la Universitat de Barcelona (1998 a 2003) i a la Lund University (Suècia, 2005 i 2011).

Es doctorà en *Estudis Empresarials, Marc estratègic de l'empresa*, a la Facultat d'Economia i Empresa de la Universitat de Barcelona, amb una tesi dirigida per les Dres. Montserrat Casanovas i Ramón i Anna Maria Gil Lafuente, titulada “Nuevas Extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión” (de 1670 pàgines d'extensió; vegeu <http://www.tdx.cat/handle/10803/1488>). La tesi la llegí el dia 18 de Febrer de l'any 2009. Feia gairebé trenta-cinc anys que jo havia llegit la meva, a la Facultat de Matemàtiques de la mateixa universitat.

Ens adonem doncs que, en l'exposició que acaba de fer, el Dr. Merigó segueix en la mateixa trajectòria però aprofundint cada cop més les possibilitats que la metodologia dels OWA ofereix quan hom s'hi endinsa i els adequa a noves estratègies, com ara les que proporciona el món dels *conjunts* i els *nombres difusos* (món *fuzzy*) —al qual, fa moltíssims anys, em vaig apropar de la mà d'Enric Trillas, Francesc Esteva i Nadal Batle (1945-1997)—, la utilització de mesures, i la probabilitat.

Aquesta recerca l'ha portat a publicar, en solitari, o en col·laboració amb d'altres prestigiosos especialistes d'aquest àmbit de recerca i estudi, 9 llibres. De sis d'ells —internacionals— n'és, juntament amb la Dra. Anna M. Gil i d'altres, editor.

El nombre d'articles especialitzats, a finals de l'any 2013, arribava a un centenar, la majoria publicats en revistes de gran qualitat en aquest àmbit de recerca (*d'impacte* com es diu actualment, encara que a mi aquesta terminologia em desagrada profundament —coeses de l'edat) i molt citats.

La seva recerca, però, no li ha fet oblidar la docència i des de l'any 2006 ha estat vinculat al Departament d'Economia i Organització d'Empreses de la Universitat de Barcelona, on ha impartit cursos (2006 a 2012), —fruit dels quals són els tres llibres docents publicats per Publicacions de la Universitat de Barcelona (2008, 2009, 2011). També n'ha impartit al Iona College (2009-2010) i a la University of Manchester (2013).

Actualment és Senior Reserch Fellow a la Manchester Business School de la University of Manchester, i membre del Risk Center de la Universitat de Barcelona.

**3. Dues característiques particulars.** Totes aquestes qualitats —tant les de docent com les d'investigador punter— et fan mereixedor —amb mèrits més que suficients— d'esdevenir membre de la nostra corporació i de ser rebut amb els braços oberts —en actitud efusiva—, i amb una gran satisfacció. S'estableix, de d'ara, la reciprocitat de drets i deures entre tu i la Reial Acadèmia que el teu ingrés comporta.

Però en la teva incorporació s'hi afegeixen dos trets que vull posar de manifest, abans d'entrar a considerar el que el teu discurs m'ha suggerit.

L'any 2004, en ocasió de la resposta a l'acte d'ingrés de l'Excm. Sr. Félix F. Cruz-Sánchez, feia una reflexió sobre les enormes dificultats que troben els nostres joves en la societat actual, dificultats de tota mena que, si bé subsisteixen o s'han agreujat encara més, no repetiré. Tanmateix la Reial Academia ha fet —i fa, com palesa, entre d'altres també recents, la teva admissió— una apostia per la joventut. Tant de bo el sector públic tingués aquesta sensibilitat i no veièssim com els nostres joves més valuosos han de marxar a treballar, sense data de retorn, com cada dia que passa es buiden de jovent els departaments de les universitats, els centres de recerca, i també els assistencials que tenen cura de la nostra salut, i els docents que han de formar els que vénen darrere nostre, etc.

I, en segon lloc perquè rebem algú que és proper a d'altres membres de l'Acadèmia en la seva tasca investigadora —que és, en definitiva, el que en justifica l'ingrés. Puc afirmar l'enorme parentiu intel·lectual i investigador amb la família Gil, pare i filla. I no es tracta —i ho vull poser de manifest— d'una mena de *nepotisme* perquè el teu currículum i la teva vàlua intel·lectual te'n fan mereixedor de ple dret. Certament que hi ha un vincle, però és un vincle d'aprenentatge, primer, i d'autèntica col·laboració —entre iguals— després i, àdhuc, de superació.

**4. Les escletxes del discurs.** Com a matemàtic podria entrar a profundir algunes de les qüestions tècniques que acabes d'exposar. Però em sembla que, com a representant de la Reial Acadèmia de Doctors —una corporació que té la singularitat de la multidisciplinarietat— em pertoca de reflexionar una mica sobre una qüestió més àmplia.

I no m'allunyo tampoc del tot ni de la teva trajectòria com investigador i docent ni tampoc de la teva exposició, si bé ho faig —com els raigs de llum— aprofitant les escletxes que hi

suggereixes: la subjectivitat, la incertesa, i el recurs a l'opinió dels experts.

Tot just a l'inici de la ponència, a la part introductòria, dius:

La inclusión de la probabilidad y la media ponderada se lleva a cabo con objeto de distinguir entre la información subjetiva y objetiva. En teoría de la probabilidad esto muchas veces se clasifica como probabilidad objetiva y subjetiva. Obsérvese que la objetividad es aquella información que viene medida por algún aspecto arbitrario como sería un experimento o la información histórica. Por el otro lado, la subjetividad viene expresada por opiniones o aspectos de carácter particular y no estrictamente arbitrario (p 10).

Més endavant, puntualitzes:

El problema es que independientemente de la arbitrariedad, la incertidumbre sigue existiendo en el problema y por tanto nadie puede garantizar que los resultados probabilísticos sean los correctos. Son los que tienen mayor probabilidad de ocurrencia pero no por ello son correctos. Por tanto, en muchos casos puede darse la situación de que los resultados probabilísticos no son del todo satisfactorios. También puede darse el caso de que simplemente el analista del problema desea sobrevalorar o infravalorar los resultados arbitrarios obtenidos con la probabilidad debido a que es un tipo de decisor que prefiere ser más optimista o pesimista que los resultados probabilísticas (p 27).

I en diverses ocasions justifiques la tria de certs paràmetres per la intervenció dels experts —quelcom totalment justificable atesos els objectius empresarials i “los criterios de utilidad” (p 48): “la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión” (p 55) que, en aquests textos, s’atribueixen als operadors de decisió:

El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera de cada estrategia (p 38).

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones  $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$  y el siguiente vector de probabilidades  $P = (0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1)$  (p 38).

En cambio, sí se dispone de ciertas creencias establecidas por personas con conocimiento del problema que indican cierta predicción hacia unos resultados determinados (p 48).

El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada inversión pueda reportar a la empresa (p 55).

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones  $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$  para las ponderaciones OWA, el siguiente vector de ponderaciones para los grados de importancia o probabilidad subjetiva  $V = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3)$  y  $P = (0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1)$ . En este problema, se da una importancia del 50% a la probabilidad ( $C_3 = 0.6$ ), un 20% a la media ponderada o probabilidad subjetiva ( $C_2 = 0.2$ ) y 20% al operador OWA ( $C_1 = 0.2$ ) (p 56).

I obviament en la tria dels tres coeficients de correcció  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  introduïts en la definició dels operadors POWAWA (p 51).

En definitiva, permete'm —i també tots vosaltres, estimats col·legues i amics, i tots vostès, senyores i senyors— que parli de *la presa de decisions*.

**5. La presa de decisions.** Recordo que, de jove, potser una mica infatuat i no tan circumspecte com ara, em venava de la meva qualitat lògica pel fet d'estudiar matemàtiques i de les possibilitats que em proporcionava a l'hora de prendre decisions, tot evitant-me caure en l'error. Recordo que el pare, amb el seny que donen els anys, em deia:

— “I com l'aplicaràs el teu rigor lògic —i crec que no deia el teu “rigor mortis” per respecte— en les decisions quotidianes: em convé aquesta o aquella xicoteta, vull tenir fills ara o més endavant; m'interessa dedicar-me a la docència, a la recerca, a la gestió; cal que m'operi o és millor que esperi a veure com evoluciona la vértebra desplaçada en l'accident de moto; o els pinçaments de la T4; i en tantes i tantes altres qüestions”.

Crec que els anys m'han fet més delicat en la qüestió de les afirmacions excessivament dogmàtiques i m'han fet veure que les decisions tenen un gran component *subjectiu* previ a la presa de la decisió.

I encara, quan de nin, havia de decidir entre dues pel·lícules (o més) i ho feia a l'atzar, després, gairebé sempre, n'anava a veure una altra: el resultat que havia sortit, en sortir, em decebia.

També era en aquells anys de joventut rebel —llavors era PNN— que en les múltiples disputes a les Junes de Facultat exigia “criteris objectius” i, el professor Dr. Josep Vaquer —un gat vell, ja des de jove—, em deia:

— Pla!, recordi que el “criteri objectiu” és aquell amb el qual s’aconsegueix allò que el qui el proposa vol aconseguir.

Els anys fan també que aforismes com la dita xinesa

— Si quan siguis gran vols caminar com quan eres jove, de jove camina com si fossis gran,

sigui objecte de reflexió. És un aforisme d’una lògica aplastant, però, amb més de setenta anys em sembla força inadequat o que requereix de matisació perquè el que cal és que el jovent sigui i actuï com a jovent i el qui és més madur, d’acord amb la seva naturalesa i edat. Cal negar la major o, si més no, com deia, cal matisar-la.

Però entrant de ple en la qüestió de la decisió com a fet individual i col·lectiu —una qüestió d’enorme actualitat política a Catalunya—, permeteu-me que dediqui un parell, o tres de fulls a reflexionar-hi.

***La decisió en la matemàtica pura.*** No fa gaire més d’un més que, en un dels actes de commemoració del centenari de la Reial Acadèmia, parlàvem de l’”*Ingorabimus*” de Hilbert. En concret, segons el matemàtic prusià (Conferència *Mathematische Probleme* (1900)):

— El problema existeix. Busca-li la solució. Pots trobar-la amb l’ús de la raó pura, ja que en la matemàtica no hi ha *Ignorabimus* (*El reto de Hilbert*, Drakontos: Madrid 2000, p 272).

Però Kurt Gödel, l’any 1931, mostrà que això és fals i que, en els sistemes formals de l’*aritmètica de Peano* i de la *teoria de conjunts*, hi ha sentències intrínsecament indecidibles. (Vegeu els articles a la revista de la RAD-*Tribuna plural*, 1).

De fet, la tria del *postulat de les paral·leles* és una decisió matemàtica, perquè, si la geometria euclidiana és consistent, també ho són les no-euclidianes.

I, en teoria de conjunts, tant l'*axioma de l'elecció* (AC) com les *hipòtesis del continu* (HC, i HGC) són indecidibles i totes elles tenen el mateix rang de consistència. Podem, doncs, treballar amb teories de conjunts sense AC —no és gaire probable atès que aquest axioma és *equivalent* a teoremes de certs àmbits concrets de la matemàtica com ara el *teorema de Tychonov*— o amb teories de conjunts sense HC.

Ras i curt, allò que és veritat en matemàtica depèn d'una elecció. I què justifica aquesta elecció? En certs casos el món exterior físic, en d'altres el propi món intern de la matemàtica. (Vegeu el meu discurs d'ingrés, 2003).

**5.1 La decisió en la teoria de la recursivitat.** El treball de Gödel suara esmentat contenia un concepte nou: les *funcions recursives* i, amb elles, implícitament el *problema de la decidibilitat*. Alan Mathison Turing (1936) matematitzà el *concepte d'algorisme*, introduint les *màquines de Turing*.

Aleshores, un problema esdevé *decidable* si, i només si, hi ha una màquina de Turing que, en introduir-li el problema, convenientment gödelitzat, dóna com a resposta 0 o 1 (sí o no).

De fet, Turing volia resoldre la qüestió plantejada també per Hilbert: l'*Entscheidungsproblem* o *problema de la decisió*. Ras i curt,

Donada una teoria formal és possible decidir quines sentències són teoremes i quines, no?

La resposta, sortosament per als matemàtics, és negativa d'acord amb els resultats de Turing. Aquest problema té un cert lligam amb el problema 10 de l'esmentada conferència del 1900 en què es demana:

Hi ha un criteri per decidir si una equació diofantica té solució?

**5.2. La decisió en la teoria de la computació.** Hi ha, doncs, problemes indecidibles intrínsecament.

Però sorgeix una qüestió nova: Hi ha problemes *finit*s—i, per tant, *decidibles* en el marc teòric— que, en la pràctica, es comporten com si fossin indecidibles.

De fet, amb les eines computacionals actuals, el temps de computació és tan gran —pot arribar a ser més gran que l'edat de l'univers— que, a efectes pràctics, el problema es comporta com si no ho fos, de decidible.

En són exemples, entre d'altres, la *factorització d'un nombre en nombres primers*—quan un nombre és gran, àdhuc si sabem que és el producte de només dos nombres primers, no podem determinar quins són; és la base de la criptologia actual—, el *problema del viatjant de comerç* —ha de visitar  $n$  ciutats minimitzant la despesa en benzina, en temps, etc.

A voltes, problemes decidibles els hem de considerar com indecidibles.

**5.3. Certes decisions individuals i col·lectives de la vida real quotidiana.** El problema del viatjant de comerç quan hi ha més vint-i-cinc poblacions —no és pas un nombre gaire gran per a un viatjant de comerç— és irresoluble: els recorreguts possibles són,

en total,  $16 \times 10^{25}$ , un nombre realment desencoratjador—, però el viatjant pren una decisió.

Aquest problema passa del vessant computacional teòric —irresoluble— al vessant de la realitat —resoluble—, i planteja la qüestió de les decisions de la nostra vida social més quotidiana.

Com n'és de sorprenent que les sentències d'uns tribunals —d'uns jutges que, per tranquil·litat d'esperit, hem de suposar que són professionals o, com dèiem suara, experts en llur matèria— puguin ser canviades substancialment i, a voltes, anul·lades per d'altres instàncies jurisdiccionals —a les quals, és clar, atribuïm, fóra el coherent, un grau major d'expertesa.

Però planteja una qüestió nova: de quina manera intervenen conscientment o inconscient motivacions subjectives que, en principi, haurien de ser alienes —o potser no!— a les decisions judicials.

I quan ens trobem davant d'una enfermetat que comporta complexitat i risc, no estem sempre disposats a cercar “una altra opinió professional” perquè entenem que pot ser discordant; i, si cal, per tal de reblar el clau, abans de prendre la decisió, una tercera.

I en els litigis —pensem en litigis contractuals com ara dissolucions matrimonials, d'empreses, o en litigis d'accidents, etc.— com pot ser que, segons les parts, la decisió a prendre sigui una o l'oposada?

**5.4. Decisions de caire polític tancades i obertes.** Em sembla que el tema és prou interessant i actual i que planteja d'una manera molt clara que les decisions són fruit de molta càrrega

subjectiva, ideològica, política, econòmica, i molt menys, en canvi, històrica, cultural, i de convivència social.

Penso, per exemple, en la decisió de la reforma de l'article 135 de la Constitució espanyola —una reforma menor, es diu, però conceptualment molt agresiva per als ciutadans de l'Estat espanyol— un text, d'altra banda, en ocasions, sacre, dogmàtic, intocable:

— Totes les Administracions Pùbliques adequaran les actuacions al principi d'estabilitat pressupuestària.

Penso també que decisions col·lectives —de caire democràtic— com ara el darrer Estatut d'Autonomia de Catalunya, pactat entre el Govern i el Parlament catalans i el govern i el Parlament de l'Estat espanyol, refrendat per tres corts (el Parlament de Catalunya, el Parlament central i el Senat) i finalment avalat, en referèndum, pel poble de Catalunya, i tot dins del marc legal de la suara sementada constitució, puguin ser anorreades per les decisions *censores* d'un Tribunal al qual li ha arribat la denúncia d'una part per raons ideològiques.

Ara mateix hi ha noves decisions a prendre: la modificació de la llei de l'abortament, l'aplicació constantment qüestionada de la política lingüística a Catalunya —amb sentències propiciades pels tribunals a instàncies de decisions particulars—, i encara l'encaix amb la llei Wert, la llei del mercat únic, la llei de finançament de les comunitats autònombes i dels ens locals, les lleis sobre les reformes judicials i procesals, etc.

I a Catalunya, decisions sobre les lleis electoral, de consultes i sobre l'establiment d'un nou marc de relació amb la resta de les Comunitats de l'Estat espanyol.

**5.5. Una decisió imminent.** Però la decisió més inmediata que tenim és la de les *eleccions europees*. Un cop decidit si abstenir-se o participar i, en el segon cas, si emetre un vot nul, en blanc o útil, caldrà decidir-se —prendre partit.

I aquí ens trobem, crec, en una situació en la qual podríem recórrer als operadors suara suggerits en la magistral lliçó del Josep M. —de ben segur que no ho farem— en base a certs ítems i la posició del grups europeus en relació amb ells:

- Més o menys Catalunya;
- Més o menys Estat espanyol.
- Més o menys Europa d'una sola via.
- Més o menys democràcia dins d'Europa.
- Més o menys desenvolupament econòmic i industrial.
- Més o menys retallades a la societat del benestar.
- Més o menys diner dels ciutadans a la mala gestió dels bancs.
- Més o menys empresa mitjana.
- Més o menys drets laborals.
- Major o menor participació internacional.
- Més o menys troica,
- Més o menys poder institucional,
- Més o menys pes dels estats,
- Més o menys respecte al dret a decidir de les nacions, sense estat propi,
- Més o menys respecte a la democràcia.
- etc.

Caldria atribuir certs pesos —difícilment probabilístics— a aquests, i/o a d'altres possibles ítems i veure quin operador de decisió sembla més idoni alhora de prendre la decisió final: a qui votar.

Però, de fet, no ho farem. O ho farem d'una forma inconscient, intuïtiva, per qüestions de sensibilitat, de simpatia amb els candidats, amb les propostes dels partits, per mor de certs condicionants dogmàtics —que, per desgràcia, tots en tenim algun d'amagat, etc.

I això és la *democràcia*: atendre el resultat coral de moltes subjectivitats; les decisions individuals —i, per tant, amb un grau molt alt de subjectivitat— es complementen, es regulen entre si, es suavitzen les unes a les altres, es matisen i, finalment, s'obté un resultat estadístic —una mena de mitjana ponderada— que recull l'aportació de cada un dels qui i han participat, corregint-se mútuament, perquè, desenganyem-nos, no hi ha una *decisió que sigui la millor, l'òptima, l'única, la vertadera*.

**6. Cloenda.** Cal que acabi. Si bé entenc que una funció molt important dels operadors que se'ns ofereixen en el dicurs és aconseguir beneficis quan s'apliquen a la gestió d'empreses, em sembla que la interdisciplinarietat de la Reial Acadèmia m'empeny a no acabar sense esmentar unes paraules del magnífic llibre de Nuccio Ordine, *L'utilità dell'inutile. Manifesto*, publicat en català a *Quaderns crema*.

Permeteu-me que feliciti públicament, en nom de la Reial corporació, i en el meu propi, al nostre company Excm. Sr. Dr. Jaume Vallcorba i Plana per dues raons: pel fet que se li hagi concedit el *Premi Nacional de Cultura de la Generalitat de Catalunya 2014* —ben merescut— i per la cura que té sempre en

la tria dels textos que publica, tant en català com en castellà, i, en particular, pel suara esmentat, on llegim:

Existeixen sabers que són fins per si mateixos i que —precisament per la seva naturalesa gratuïta i desinteresada, allunyada de tot vincle pràctic i comercial— poden exercir un paper fonamental en el conreu de l'esperit i en el desenvolupament civil i cultural de la humanitat. En aquest context, considero *útil* tot allò que ens ajuda a fer-nos millors (*La utilitat de l'inútil*. Quaderns Crema: Barcelona, 2014, p.).

Un conreu que és el de la Reial Acadèmia de Doctors i que ara, amb la teva incorporació, guanya un especialista jove que hi contribuirà amb tot el seu saber, passió i entusiasme.

Josep Maria ben vingut a la Reial Acadèmia de Doctors!

Barcelona, 20 de maig del 2014





## PUBLICACIONES DE LA REIAL ACADEMIA DE DOCTORS

### *Directori 1991*

*Los tejidos tradicionales en las poblaciones pirenaicas* (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Eduardo de Aysa Satué, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Josep A. Plana i Castellví, Doctor en Geografia i Història) 1992.

*La tradición jurídica catalana* (Conferència magistral de l'acadèmic de número Excm. Sr. Josep Joan Pintó i Ruiz, Doctor en Dret, en la Solemne Sessió d'Apertura de Curs 1992-1993, que fou presidida per SS.MM. el Rei Joan Carles I i la Reina Sofia) 1992.

*La identidad étnica* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Pou d'Avilés, Doctor en Dret) 1993.

*Els laboratoris d'assaig i el mercat interior; Importància i nova concepció* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Simón i Tor, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1993.

*Contribución al estudio de las Bacteriemias* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il·lm. Sr. Miquel Marí i Tur, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm. Sr. Manuel Subirana i Cantarell, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1993.

*Realitat i futur del tractament de la hipertròfia benigna de pròstata* (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia i contestació per l'Excm. Sr. Albert Casellas i Condom, Doctor en Medicina i Cirurgia i President del Col·legi de Metges de Girona) 1994.

*La seguridad jurídica en nuestro tiempo. ¿Mito o realidad?* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1994.

*La transició demogràfica a Catalunya i a Balears* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ferrer i Bernard, Doctor en Psicologia) 1994.

*L'art d'ensenyar i d'aprendre* (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Agustín Luna Serrano, Doctor en Dret) 1995.

*Sessió necrològica en record de l'Excm. Sr. Lluís Dolcet i Boxeres*, Doctor en Medicina i Cirurgia i Degà-emèrit de la Reial Acadèmia de Doctors, que morí el 21 de gener de 1994. Enaltiren la seva personalitat els acadèmics de número Excms. Srs. Drs. Ricard Garcia i Vallès, Josep Ma. Simón i Tor i Albert Casellas i Condom. 1995.

*La Unió Europea com a creació del geni polític d'Europa* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Jordi Garcia-Petit i Pàmies, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques) 1995.

*La explosión innovadora de los mercados financieros* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il·lm. Sr. Emilio Soldevilla García, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm. Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret) 1995.

*La cultura com a part integrant de l'Olimpisme* (Discurs d'ingrés com a acadèmic d'Honor de l'Excm. Sr. Joan Antoni Samaranch i Torelló, Marquès de Samaranch, i contestació per l'Excm. Sr. Jaume Gil Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques) 1995.

*Medicina i Tecnologia en el context històric* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baután) 1995.

*Els sòlids platònics* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Pilar Bayer i Isant, Doctora en Matemàtiques, i contestació per l'Excm. Sr. Ricard Garcia i Vallès, Doctor en Dret) 1996.

*La normalització en Bioquímica Clínica* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Xavier Fuentes i Arderiu, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm. Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Geografia) 1996.

*L'entropia en dos finals de segle* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques, i contestació per l'Excm. Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques) 1996.

*Vida i música* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Carles Ballús i Pascual, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Espadaler i Medina, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1996.

*La diferencia entre los pueblos* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il·lm. Sr. Sebastià Trías Mercant, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

*L'aventura del pensament teològic* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia, i contestació per l'Excm. Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 1996.

*El derecho del siglo XXI* (Discurs d'ingrés com a acadèmic d'Honor de l'Excm. Sr. Dr. Rafael Caldera, President de Venezuela, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

*L'ordre dels sistemes desordenats* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm. Sr. Joan Bassegoda i Novell, Doctor en Arquitectura) 1997.

*Un clam per a l'ocupació* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Isidre Fainé i Casas, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Joan Bassegoda i Nonell, Doctor en Arquitectura) 1997.

*Rosalía de Castro y Jacinto Verdaguer, visión comparada* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Jaime M. de Castro Fernández, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

*La nueva estrategia internacional para el desarrollo* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Santiago Ripol i Carulla, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

*El aura de los números* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins,

Canals i Ports, i contestació per l'Excm. Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 1998.

*Nova recerca en Ciències de la Salut a Catalunya* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excm. Sra. Anna Maria Carmona i Cornet, Doctora en Farmàcia, i contestació per l'Excm. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 1999.

*Dilemes dinàmics en l'àmbit social* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Albert Biayna i Mulet, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 1999.

*Mercats i competència: efectes de liberalització i la desregulació sobre l'eficàcia econòmica i el benestar* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Amadeu Petitbó i Juan, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Jaime M. de Castro Fernández, Doctor en Dret) 1999.

*Epidemias de asma en Barcelona por inhalación de polvo de soja* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excm. Sra. Ma. José Rodrigo Anoro, Doctora en Medicina, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques) 1999.

*Hacia una evaluación de la actividad cotidiana y su contexto: ¿Presente o futuro para la metodología?* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excm. Sra. María Teresa Anguera Argilaga, Doctora en Filosofía i Lletres (Psicologia) i contestació per l'Excm. Sr. Josep A. Plana i Castellví, Doctor en Geografía i Història) 1999.

#### *Directorio 2000*

*Génesis de una teoría de la incertidumbre.* Acte d'imposició de la Gran Creu de l'Orde d'Alfons X el Savi a l'Excm. Sr. Dr. Jaume Gil-Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Financeres) 2000.

*Antonio de Capmany: el primer historiador moderno del Derecho Mercantil* (discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Xabier Añoveros Trías de Bes, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Santiago Dexeus i Trías de Bes, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2000.

*La medicina de la calidad de vida* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Luís Rojas Marcos, Doctor en Psicologia, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Ángel Aguirre Bartzán, Doctor en psicologia) 2000.

*Pour une science touristique: la tourismologie* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il·lm. Sr. Dr. Jean-Michel Hoerner, Doctor en Lletres i President de la Universitat de Perpinyà, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Jaume Gil-Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques) 2000.

*Virus, virus entèrics, virus de l'hepatitis A* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Albert Bosch i Navarro, Doctor en Ciències Biològiques, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària) 2000.

*Mobilitat urbana, medi ambient i automòbil. Un desafiament tecnològic permanent* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Pere de Esteban Altirriba, Doctor en Enginyeria Industrial, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Carlos Dante Heredia García, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2001.

*El rei, el burgès i el cronista: una història barcelonina del segle XIII* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. José Enrique Ruiz-Domènec, Doctor en Història, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2001.

*La informació, un concepte clau per a la ciència contemporània* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Salvador Alsius i Clavera, Doctor en Ciències de la Informació, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports) 2001.

*La drogaaddicció com a procés psicobiològic* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Miquel Sánchez-Turet, Doctor en Ciències Biològiques, i contestació per l'Excm. Sr. Pedro de Esteban Altirriba, Doctor en Enginyeria Industrial) 2001.

*Un univers turbulent* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jordi Isern i Vilaboy, Doctor en Física, i contestació per l'Excm. Sra. Dra. Maria Teresa Anguera Argilaga, Doctora en Psicologia) 2002.

*L'envelliment del cervell humà* (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Dr. Jordi Cervós i Navarro, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep Ma. Pou d'Avilés, Doctor en Dret) 2002.

*Les telecomunicacions en la societat de la informació* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Ángel Cardama Aznar, Doctor en Enginyeria de Telecomunicacions, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports) 2002.

*La veritat matemàtica* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera, doctor en Matemàtiques, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 2003.

*L'humanisme essencial de l'arquitectura moderna* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Helio Piñón i Pallarés, Doctor en Arquitectura, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Xabier Añoveros Trías de Bes, Doctor en Dret) 2003.

*De l'economia política a l'economia constitucional* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Joan Francesc Corona i Ramon, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Xavier Iglesias i Guiu, Doctor en Medicina) 2003.

*Temperància i empatia, factors de pau* (Conferència dictada en el curs del cicle de la Cultura de la Pau per el Molt Honorable Senyor Jordi Pujol, President de la Generalitat de Catalunya, 2001) 2003.

*Reflexions sobre resistència bacteriana als antibòtics* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Dra. Ma. de los Angeles Calvo i Torras, Doctora en Farmàcia i Veterinària, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària) 2003.

*La transformación del negocio jurídico como consecuencia de las nuevas tecnologías de la información* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Rafael Mateu de Ros, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Jaime Manuel de Castro Fernández, Doctor en Dret) 2004.

*La gestión estratégica del inmovilizado* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numeraria Excma. Sra. Dra. Anna Maria Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep J. Pintó i Ruiz, Doctor en Dret) 2004.

*Los costes biológicos, sociales y económicos del envejecimiento cerebral* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Félix F. Cruz-Sánchez, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera, Doctor en Matemàtiques) 2004.

*El conocimiento glaciar de Sierra Nevada. De la descripción ilustrada del siglo XVIII a la explicación científica actual.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numeri Excm. Sr. Dr. Antonio Gómez Ortiz, Doctor en Geografia, i contestació per l'acadèmica de número Excma. Sra. Dra. Maria Teresa Anguera Argilaga, Doctora en Filosofia i Lletres (Psicologia) )2004.

*Los beneficios de la consolidación fiscal: una comparativa internacional* (Discurs de recepció com a acadèmic d'Honor de l'Excm. Sr. Dr. Rodrigo de Rato y Figaredo, Director-Gerent del Fons Monetari Internacional. El seu padrí d'investidura és l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaime Manuel de Castro Fernández, Doctor en Dret) 2004.

*Evolución histórica del trabajo de la mujer hasta nuestros días* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Eduardo Alemany Zaragoza, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Rafel Orozco i Delclós, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2004.

*Geotecnia: una ciencia para el comportamiento del terreno* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Antonio Gens Solé, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports) 2005.

*Sessió acadèmica a Perpinyà, on actuen com a ponents; Excma. Sra. Dra. Anna Maria Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials i Excm. Sr. Dr. Jaume Gil-Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials: "Nouvelles perspectives de la recherche scientifique en economie et gestion"; Excm. Sr. Dr. Rafel Orozco i Delcós, Doctor en Medicina i Cirurgia: "L'impacte mèdic i social de les cèl·lules mare"; Excma. Sra. Dra. Anna Maria Carmona i Cornet, Doctora en Farmàcia: "Nouvelles stratégies oncologiques"; Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària: "Les résistances bactériennes a les antibiotiques". 2005.*

*Los procesos de concentración empresarial en un mercado globalizado y la consideración del individuo* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Fernando Casado Juan, Doctor en Ciències Econòmiques

i Empresarials, i contestació de l'Excm. Sr. Dr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 2005.

*“Son nou de flors els rams li renç”* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jaume Vallcorba Plana, Doctor en Filosofia i Lletres (Secció Filologia Hispànica), i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Enrique Ruíz-Domènec, Doctor en Filosofia i Lletres) 2005.

*Historia de la anestesia quirúrgica y aportación española más relevante* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Vicente A. Gancedo Rodríguez, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2006.

*El amor y el desamor en las parejas de hoy* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Paulino Castells Cuixart, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Joan Trayter i Garcia, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2006.

*El fenomen mundial de la deslocalització com a instrument de reestructuració empresarial* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort i Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Isidre Fainé i Casas, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2006.

*Biomaterials per a dispositius implantables en l'organisme. Punt de trobada en la Historia de la Medicina i Cirurgia i de la Tecnologia dels Materials* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Anton Planell i Estany, Doctor en Ciències Físiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària) 2006.

*La ciència a l'Enginyeria: El llegat de l'école polytechnique.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Xavier Oliver i Olivella, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera, Doctor en Matemàtiques) 2006.

*El voluntariat: Un model de mecenatge pel segle XXI.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica de número Excm. Sra. Dra. Rosamarie Cammany Dorr, Doctora en Sociologia de la Salut, i contestació per l'Excm. Sra. Dra. Anna Maria Carmona i Cornet, Doctora en Farmàcia) 2007.

*El factor religioso en el proceso de adhesión de Turquía a la Unión Europea.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Maria Ferré i Martí, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Carlos Dante Heredia García, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2007.

*Coneixement i ètica: reflexions sobre filosofia i progrés de la propedèutica mèdica.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Màrius Petit i Guinovart, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia) 2007.

*Problemática de la familia ante el mundo actual.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic honorari Excm. Sr. Dr. Gustavo José Noboa Bejarano, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Paulino Castells Cuixart, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2007.

*Alzheimer: Una aproximació als diferents aspectes de la malaltia.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica honoraria Excm. Sra. Dra. Nuria Durany Pich, Doctora en Biologia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate, Doctor-Enginyer de Camins, Canals i Ports) 2008.

*Guillem de Guimerà, Frare de l'hospital, President de la Generalitat i gran Prior de Catalunya.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic honorari Excm. Sr. Dr. Josep Maria Sans Travé, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. D. José E. Ruiz Domènec, Doctor en Filosofia Medieval) 2008.

*La empresa y el empresario en la historia del pensamiento económico. Hacia un nuevo paradigma en los mercados globalizados del siglo XXI.* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Guillermo Sánchez Vilariño, Doctor Ciències Econòmiques i Financeres, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaume Gil Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Financeres) 2008.

*Incertesa i bioenginyeria* (Sessió Acadèmica dels acadèmics corresponents Excm. Sr. Dr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia amb els ponents Excm. Sr. Dr. Joan Anton Planell Estany, Doctor en Ciències Físiques, Excma. Sra. Dra. Anna M. Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Financeres i Il·lm. Sr. Dr. Humberto Villavicencio Mavrich, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2008.

*Els Ponts: Història i repte a l'enginyeria estructural* (Sessió Acadèmica dels acadèmics numeraris Excm. Sr. Dr. Xavier Oliver Olivella, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, i Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, amb els Ponents Il·lm. Sr. Dr. Angel C. Aparicio Bengoechea, Professor i Catedràtic de Ponts de l'escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona, Il·lm. Sr. Dr. Ekkehard Ramm, Professor, institute Baustatik) 2008.

*Marketing político y sus resultados* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Francisco Javier Maqueda Lafuente, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials i contestació per l'acadèmica de número Excm. Sra. Dra. Anna M. Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Financeres) 2008.

*Modelo de predicción de “Enfermedades” de las Empresas a través de relaciones Fuzzy* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr Dr. Antoni Terceño Gómez, Doctor en Ciències Econòmiques i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Paulino Castells Cuixart, Doctor en Medicina) 2009.

*Células Madre y Medicina Regenerativa* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Juan Carlos Izpisúa Belmonte, Doctor en Farmàcia i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina) 2009.

*Financiación del déficit externo y ajustes macroeconómicos durante la crisis financiera El caso de Rumania* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Mugur Isarescu, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2009.

*El legado de Jean Monnet* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excm. Sra. Dra. Teresa Freixas Sanjuán, Doctora en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Fernando Casado Juan, Doctor en Ciències Econòmiques) 2010.

*La economía china: Un reto para Europa* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jose Daniel Barquero Cabrero, Doctor en Ciències Humanes, Socials i Jurídiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2010.

*Les radiacions ionitzants i la vida* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Albert Biete i Solà, Doctor en Medicina, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 2010.

*Gestió del control intern de riscos en l'empresa postmoderna: àmbits econòmic i jurídic* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Ramon Poch i Torres, Doctor en Dret i Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'acadèmica de número Excma. Sra. Dra. Anna Maria Gil i Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2010.

*Tópicos típicos y expectativas mundanas de la enfermedad del Alzheimer* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Rafael Blesa, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències econòmiques i Dret) 2010.

*Los Estados Unidos y la hegemonía mundial: ¿Declive o reinención?* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Mario Barquero i Cabrero, Doctor en Economia i Empresa, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort i Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2010.

*El derecho del Trabajo encrucijada entre los derechos de los trabajadores y el derecho a la libre empresa y la responsabilidad social corporativa* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Luis Salido Banús, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Manuel Subirana Canterell) 2011.

*Una esperanza para la recuperación económica* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jaume Gil i Lafuente, Doctor en Econòmiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia) 2011.

*Certeses i incerteses en el diagnòstic del càncer cutani: de la biologia molecular al diagnòstic no invasiu* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Josep Malvehy, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Llort, Doctor en Econòmiques i Dret) 2011.

*Una mejor universidad para una economía más responsable* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Senén Barro Ameneiro, Doctor en

Ciències de la Computació i Intel·ligència, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaume Gil i Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2012.

*La transformació del món després de la crisi. Una anàlisi polièdrica i transversal* (Sessió inaugural del Curs Acadèmic 2012-2013 on participen com a ponents: l'Excm. Sr. Dr. José Juan Pintó Ruiz, Doctor en Dret: “*El Derecho como amortiguador de la inequidad en los cambios y en la Economía como impulso rehumanizador*”, Excm. Sra. Dra. Rosmarie Cammany Dorr, Doctora en Sociologia de la Salut: “*Salut: mitjà o finalitat?*”, Excm. Sr. Dr. Ángel Aguirre Baután, Doctor en Filosofia i Lletres: “*Globalización Económico-Cultural y Repliegue Identitario*”, Excm. Sr. Dr. Jaime Gil Aluja, Doctor en Econòmiques: “*La ciencia ante el desafío de un futuro progreso social sostenible*” i Excm. Sr. Dr. Eugenio Ofñate Ibañez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports: “*El reto de la transferencia de los resultados de la investigación a la industria*”), publicació en format digital [www.reialacademiadoctors.cat](http://www.reialacademiadoctors.cat), 2012.

*La quantificació del risc: avantatges i limitacions de les assegurances* (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numeraria Excm. Sra. Dra. Montserrat Guillén i Estany, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'acadèmica de número Excm. Sra. Dra. M. Teresa Anguera i Argilaga, Doctora en Filosofia i Lletres-Psicologia) 2013.

*El procés de la visió: de la llum a la consciència* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Rafael Ignasi Barraquer i Compte, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestación per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Daniel Barquero Cabrero, Doctor en Ciències Humanes, Socials i Jurídiques) 2013.

*Formación e investigación: creación de empleo estable* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Mario Barquero Cabrero, Doctor en Economia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Luis Salido Banús, Doctor en Dret) 2013.

*El sagament de l'Eucaristia: de l'Últim Sopar a la litúrgia cristiana antiga* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Armand Puig i Tàrrech, Doctor en Sagrada Escriptura, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaume Vallcorba Plana, Doctor en Filosofia i Lletres) 2013.

*Al hilo de la razón. Un ensayo sobre los foros de debate* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Enrique Tierno Pérez-Relaño, Doctor en Física Nuclear, y contestación por la académica de número Excm. Sra. Dra. Ana María Gil Lafuente, Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales) 2014.

### **Col·lecció Reial Acadèmia de Doctors – Fundación Universitaria Eserp**

1. *La participació del Sistema Nerviós en la producció de la sang i en el procés cancerós* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Pere Gascón i Vilaplana, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmica de número Excm. Sra. Dra. Montserrat Guillén i Estany, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresariales) 2014.
2. *Información financiera: luces y sombras* (Discurso de ingreso del Académico Numerario Excmo. Sr. Dr. Emili Gironella Masgrau, Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales y contestación por el Académico de Número Excmo. Sr. Dr. José Luis Salido Banús, Doctor en Derecho) 2014.
3. *Crisis, déficit y endeudamiento* (Discurso de ingreso del Académico Numerario Excmo. Sr. Dr. José María Gay de Liébana Saludas, Doctor en Ciencias Económicas y Doctor en Derecho y contestación por el Académico de Número Excmo. Sr. Dr. Juan Francisco Corona Ramón, Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales) 2014.
4. *Les empreses d'alt creixement: factors que expliquen el seu èxit i la seva sostenibilitat a llarg termini* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Oriol Amat i Salas, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariais, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Santiago Dexeus i Trias de Bes, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariais) 2014.
5. *Estructuras metálicas* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Joan Olivé Zaforteza, Doctor en Ingeniería Industrial y contestación por el académico de número Excmo. Sr. Dr. Xabier Añoveros Trias de Bes, Doctor en Derecho) 2014.

6. *La acción exterior de las comunidades autónomas* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Josep Maria Bové Montero, Doctor en Administración y Dirección de Empresas y contestación por el académico de número Excmo. Sr. Dr. José María Gay de Liébana Saludas, Doctor en Ciencias Económicas y Doctor en Derecho) 2014.
7. *El eco de la música de las esferas. Las matemáticas de las consonancias* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Vicente Liern Carrión, Doctor en Ciencias Matemáticas (Física Teórica) y contestación por la académica de número Excma. Sra. Dra. Pilar Bayer Isant, Doctora en Matemáticas) 2014.
8. *La media ponderada ordenada probabilística: Teoría y aplicaciones* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. José María Merigó Lindahl, Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales y contestación por el académico de número Excmo. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera, Doctor en Ciencias Matemáticas) 2014.









**Josep Pla i Carrera** (Sant Feliu de Guixols, 1942) és professor emèrit de la UB.

Llicenciat en Matemàtiques per la Facultat de Matemàtiques de la UB (1969), s'hi doctorà (1975): *Contribucions a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes lògics deductius* (dirigida pel Dr. Francesc d'Assís Sales).

Fins el 1985 féu recerca en lògica algebraica i després en *Història de la matemàtica*.

En són fruits la introducció de *Lògica matemàtica* (dos cursos) —impartits des de 1969 fins el 2007—, i dos d'*Història de la matemàtica*, reduïts, però vients, i les vuit tesis doctorals que ha dirigit.

Ha estat membre en més de 30 tribunals de tesis doctorals.

Des del 2003 és membre numerari de la Reial Acadèmia de Doctors on, en l'acte d'admissió, llegí *La Veritat matemàtica*.

La FME de la UPC el distingí com a Magíster honoris causa. Hi llegí *El fet docent matemàtic: un conte*.

Premis: *Barcelona per a Estudis i Investigacions en Ciència Cognitiva i Lògica* (1984 i 1992), *Ferran Sunyer i Balaguer* (1991), de *Literatura científica* (1997) per la novel·la *Damunt les espalles dels gegants*.

Fou Cap d'Estudis de l'Ensenyament de Matemàtiques (UB, 1985-1989) i de Degà de la Facultat de Matemàtiques (UB, 1989-1992).

Amb Pelegrí Viader traduí al català la *Géométrie de Descartes* (1999), i amb ell i Jaume Paradís *Opera varia de Fermat* (2008).

Elabora, amb un projecte de la Societat de Ciència i Tecnologia de l'IEC dirigit per la Dra. Pilar Bayer (2013-2015), *Història de la matemàtica grega*.

“El tema que se presenta en este discurso de ingreso versa sobre un nuevo concepto que se ha estado desarrollando en los últimos años y que abarca a un gran número de disciplinas científicas. Se trata de una herramienta de la estadística con una aplicabilidad muy amplia que ha sido diseñada mayoritariamente dentro del ámbito de las ciencias de la computación. Este operador es la media ponderada ordenada probabilística que viene del inglés *probabilistic ordered weighted average*. Como el mismo nombre indica, es un modelo más general a la media ponderada clásica que incluye a la probabilidad y a unas ordenaciones que reflejan la actitud del decisor en el análisis. En teoría de la decisión permite unificar los dos grandes entornos de toma de decisiones en condiciones de riesgo e incertidumbre dentro de una misma formulación. También se estudian una amplia gama de aplicaciones que se pueden elaborar con este nuevo operador en una amplia gama de áreas científicas. Este operador es una generalización de la ya muy conocida media ponderada ordenada mediante el uso de probabilidades. La media ponderada ordenada, del inglés *ordered weighted average*, es un operador que proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación entre el mínimo y el máximo. Permite sobrevalorar o infravalorar la información según la actitud del decisor en el problema estudiado.”

José M. Merigó Lindahl

1914 - 2014

Col·lecció Reial Acadèmia de Doctors - Fundación Universitaria Eserp



Generalitat  
de Catalunya



GOBIERNO  
DE ESPAÑA  
MINISTERIO  
DE EDUCACIÓN, CULTURA  
Y DEPORTE