

El eco de la música de las esferas.

Las Matemáticas de las consonancias

Vicente Liern Carrión



Reial Acadèmia de Doctors





Vicente Liern Carrión es doctor en Matemáticas, en la especialidad de Física Teórica, por la Universitat de València, donde ejerce su labor docente como catedrático de Economía Financiera y Contabilidad.

Iniició su carrera investigadora dentro de la Física Matemática, analizando el movimiento de partículas elementales en relatividad general. Posteriormente su campo de investigación ha sido la optimización matemática, bajo condiciones de incertidumbre, aplicada a modelos de inversión, de logística y de gestión de recursos humanos.

Preocupado siempre por la didáctica y la divulgación de las matemáticas, es miembro, desde su fundación, de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana y de otras asociaciones como la Societat Catalana de Matemàtiques, la Real Sociedad Matemática Española o la Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa, en la que forma parte del consejo de dirección.

El hecho de ser músico, durante más de veinte años, de la Banda de Paterna, le llevó a la investigación de aspectos comunes entre la música y las matemáticas, y esto le ha propiciado colaboraciones y estancias, por ejemplo, con las universidades de Lyon, Yale o el Instituto Politécnico de México. Desde 2008 coordina la sección *Musymáticas* de la revista Suma.

Ha sido seis años director del departamento de Matemáticas para la Economía y la Empresa de la Universitat de València. Actualmente dirige el grupo de investigación *Sistemas inteligentes para tomar decisiones económico-financieras bajo condiciones de incertidumbre* y es editor de las revistas Rect@ y Anales de ASEPUMA.

**El eco de la música
de las esferas.
Las Matemáticas
de las consonancias**

Excmo. Sr. Dr. Vicente Liern Carrión

El eco de la música de las esferas.

Las Matemáticas de las consonancias

Discurso de ingreso en la Reial Acadèmia de Doctors, como
Académico Numerario, en el acto de su recepción
el 15 de mayo de 2014

Excmo. Sr. Dr. Vicente Liern Carrión
Doctor en Ciencias Matemáticas (Física Teórica)

Y contestación de la Académica de Número

Excma. Sra. Dra. Pilar Bayer i Isant
Doctora en Matemáticas

COL·LECCIÓ REIAL ACADEMIA DE DOCTORS – FUNDACIÓN UNIVERSITARIA ESERP



Reial Acadèmia de Doctors

www.reialacademiadoctors.cat



www.eserp.com

© Vicente Liern Carrión.
© Reial Acadèmia de Doctors.
© Fundación Universitaria Eserp.

La Reial Acadèmia de Doctors, respetando como criterio de autor las opiniones expuestas en sus publicaciones, no se hace ni responsable ni solidaria.

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del “Copyright”, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos públicos.

Producción Gráfica: Ediciones Gráficas Rey, S.L.

Impreso en papel offset blanco Superior por la Reial Acadèmia de Doctors.

ISBN: 978-84-616-9929-2
Depósito Legal: B 11468-2014

Impreso en España –Printed in Spain- Barcelona

Fecha de publicación: Mayo 2014

En el año del Centenario de la Reial Acadèmia de Doctors, la Fundación Universitaria ESERP ha querido contribuir a la creación de una nueva colección de publicaciones que lleva el nombre de las dos entidades así consorciadas. Su aportación permite que la Academia cuente con esta nueva herramienta al servicio de la difusión del conocimiento.

PRESENTACIÓN Y AGRADECIMIENTOS

Excelentísimo Sr. Presidente de esta Reial Acadèmia,
Excelentísimas e Ilustrísimas Autoridades,
Excelentísimos Señores Académicos,
familiares, amigos, señoras y señores.

Deseo que mis primeras palabras sean de agradecimiento a la Reial Acadèmia de Doctors por el nombramiento y a su presidente por hacerlo posible. Es un gran honor al cual espero poder corresponder contribuyendo al progreso del conocimiento científico con la máxima dedicación y dignidad. En especial, quiero manifestar mi gratitud hacia los Señores Académicos que aceptaron mi ingreso y muy en particular a la Excma. Sra. Dra. Anna Maria Gil Lafuente, por su ayuda y ánimo en todo momento.

A principios de los años noventa, leí un artículo del Dr. J. Madoré, que trabajaba en una estructura a la que llamaba Fuzzy Sphere. Sinceramente, no comprendí su utilidad en las partículas elementales y lo dejé. Hube de esperar siete u ocho años hasta que tuve la fortuna de que un ilustre académico, entre otras, de esta Docta Casa, el Excmo. Sr. Dr. Jaime Gil Aluja, impartiese un curso en Valencia que trataba sobre la lógica borrosa. El profesor Gil Aluja sabe que desde entonces he tenido ocasión de utilizar las técnicas derivadas de esta lógica en varios contextos, y por éstas y otras muchas enseñanzas le estaré siempre agradecido.

Hay otro miembro de esta Reial Acadèmia a quien me gustaría expresar mi gratitud explícitamente, la Excma. Sra. Dra. Pilar Bayer i Isant, que tengo el honor de que pronuncie el discurso de contestación. Ya hace casi dos décadas, en el transcurso de la

I Trobada Catalana de Matemàtiques, la ayuda generosa y desinteresada de la Dra. Bayer me permitió continuar con la investigación en Música y Matemáticas que estaba llevando a cabo.

Prácticamente toda mi vida académica e investigadora la he pasado en la Universitat de València, por eso son muchas las personas vinculadas con esta institución a las que estoy muy agradecido. A profesores, directores y compañeros les debo mucho de lo que he podido conseguir, especialmente al Dr. Olivert, mi director de tesis, de quien tanto he aprendido y a quien su estado de salud no le permite estar hoy aquí. Pero también me gustaría agradecer a otras instituciones como el Centre de Physique Théorique de la Université de Marseille, a la Université de Lyon y al Instituto Politécnico Nacional de México, no sólo por acogerme, sino por mostrarme generosamente otras formas de trabajar.

Por supuesto, quiero hacer una mención especial a mi familia, por su enorme comprensión, su paciencia y por estar siempre a mi lado. Una familia que incluye a varios amigos que sencillamente son excepcionales. Muy especialmente quiero destacar a Marina y Teresa, mis hijas, que me hacen seguir adelante, incluso en los malos momentos. Y, ¡cómo no!, me habría gustado mucho que hoy estuviesen aquí personas muy importantes en mi vida, pero la Biología no siempre entiende de sentimientos.

Finalmente, hago extensivo este agradecimiento a todos los que hoy me acompañan en este acto.



ÍNDICE

Presentación y agradecimientos.....	7
DISCURSO DE INGRESO	11
1. INTRODUCCIÓN	11
2. EL CONTEXTO	13
3. LA MÚSICA DE LOS PITAGÓRICOS: EL NÚMERO HECHO ARMONÍA	17
4. AMPLIANDO LAS CONSONANCIAS: LA JUSTA ENTONACIÓN	27
5. MÁS DE DOS SIGLOS DE CONTROVERSIAS A CAUSA DE LAS CONSONANCIAS	35
6. EL TRIUNFO DE LAS APROXIMACIONES	49
7. LAS ESFERAS Y LAS CONSONANCIAS QUE USAN LOS MÚSICOS	55
8. REFLEXIONES FINALES	67
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
DISCURS DE CONTESTACIÓ	77
Publicacions de la Reial Acadèmia de Doctors	85

❧ I. INTRODUCCIÓN

Cuando me planteé la elección de un tema para este discurso de investidura, desde el primer momento pensé que podría ser adecuado tratar algún aspecto de Música y Matemáticas en el que hubiese investigado recientemente. Pero, cuando se pasa de la intención a los hechos, relacionar varias disciplinas de forma rigurosa, sin cometer excesos de especialización, impone varios condicionantes a la estructura del trabajo. Por un lado, está el manejo de conceptos provenientes de campos muy dispares, que pueden dificultar la claridad de la exposición y, por otro, que las ideas deben expresarse en un documento cuyas dimensiones no hagan perder el interés de quien lo lee o lo escucha.

Para intentar paliar estas dificultades, utilizaremos como hilo conductor una idea que, en mi opinión, es sugerente: *la música de las esferas*. El grado de atracción por el estudio de la armonía del cosmos nos servirá como reflejo de la esencia numérica atribuida a la música en diferentes momentos históricos. Pero además, nos permitirá mostrar algunas de las controversias en las que participaron músicos, matemáticos y físicos de primera línea, sobre todo en épocas en las que la ciencia y el arte parecían más próximos.

De entre todas las aportaciones que las Matemáticas y la Música pueden hacerse mutuamente, aquí nos centraremos únicamente en algunos de los criterios para determinar cuáles deben ser las *notas musicales*; o dicho de otro modo, por qué unos sonidos se han elevado a la categoría de notas, mientras que el resto han sido rechazados. Esta idea, que llegó a obsesionar a grandes pensadores, se formularía en un lenguaje actual como “una búsqueda de criterios para seleccionar frecuencias”. Pero esa aparente simplicidad no debe ocultar que, de los muchos

esfuerzos que se han hecho para expresar matemáticamente una parte de la belleza, han surgido grandes construcciones.

En nuestra disposición por descubrir cómo fijar los elementos con los que se desarrolla la música, veremos que las propuestas han sido muy diversas, de hecho ha habido centenares de formas de llegar a los *sistemas de afinación*, que así llamaremos a los conjuntos de notas musicales. Sin embargo, sólo las elecciones que verificaban determinadas propiedades matemáticas se han utilizado de forma amplia y han llegado hasta nuestros días.

Como cabía esperar, resulta imposible ser exhaustivo con los sucesos y los descubrimientos de más de veinticinco siglos de historia, por lo tanto, en lo que sigue habremos de conformarnos con dar algunas pinceladas a una relación muy fructífera. Esto sin desdeñar la posibilidad de mostrar el lado humano de los científicos. La obstinación de Kepler por encontrar la relación entre el movimiento de los planetas y la música, como, por ejemplo, el interés de Newton por la alquimia, podrían parecer limitaciones científicas. Sin embargo, lo que hace grandes a los investigadores es precisamente su libertad respecto de las ideas convencionales y su apertura a nuevas dimensiones de los problemas. Y al fin y al cabo, en mi opinión, ese debería ser el objetivo del discurso de investidura: contribuir, dentro de mis posibilidades, a la reflexión, a la apertura a nuevas perspectivas y al debate, en un foro tan interdisciplinario como es la Reial Acadèmia de Doctors.



❧ 2. EL CONTEXTO

En ocasiones, cuando se rastrea el origen de alguna disciplina científica, aparece un pasado turbio en el que las Antiguas Civilizaciones identificaban ciencia, arte, técnica o religión. Esto ha hecho que en muchos casos resulte difícil conocer bien la cronología de los hechos. Sin embargo, en materia de Música, parece indudable que el arte se anticipó a la ciencia, y mucho antes de que existieran construcciones teóricas, los músicos ya habían adoptado prácticas que, analizadas objetivamente, constituyen auténticos algoritmos. Por ejemplo, muchos siglos antes de que se representasen gráficamente las funciones o incluso de que se hubiese establecido el concepto de función, en el canto gregoriano de la Edad Media, los músicos ya representaban la altura de las notas a lo largo del tiempo. Todo empezó con apenas una línea horizontal coloreada que se situaba sobre el texto, y fue la necesidad de precisión la que *obligó* a ir añadiendo más líneas hasta configurar el pentagrama que usamos hoy en día. ¿Quién puede afirmar que la inspiración de los ejes cartesianos no está precisamente en estos hechos?

Algo parecido ocurre con un algoritmo tan eficaz como el de Euclides para calcular el máximo común divisor. Según el matemático e historiador de la ciencia Arpad Szabo (1913 – 2001), el origen de este algoritmo está en las divisiones sucesivas de las cuerdas para producir las notas musicales, hecho al que más adelante haremos referencia con las afinaciones griegas. O centrándonos más en el tema, no resulta fácil determinar qué parte del descubrimiento de las leyes de Kepler se debe a la búsqueda de la armonía universal.

Que los astros producen, en su movimiento ordenado, un sonido armonioso, es una vieja idea que se encuentra entre las más extendidas de nuestra cultura occidental. Para los padres de la

astronomía, Dios era, además de un supremo arquitecto, sobre todo, un músico, y describir la estructura del cosmos era identificar la armonía musical que se encarnaba en las relaciones existentes entre las traslaciones de los distintos astros.

Un avance importante de la astronomía griega respecto a la babilónica fue la concepción de un universo esférico, hecho que llevó a la representación semiesférica habitual de la bóveda celeste. Así, en el siglo VI a. C., Anaximandro describe la Tierra como una gran columna cilíndrica, baja y ancha, suspendida en el aire en el centro del Universo. Al encontrarse exactamente en el centro, no tendría motivo para elegir una dirección u otra, y esto es lo que no le permitía caer. Alrededor de la Tierra giraban esferas inmensas de fuego, forradas de aire comprimido, en cuyo borde interno había unos agujeros (mejor dicho, unos conductos parecidos a las flautas) a través de los que se podía entrever el resplandor de la envoltura incandescente que estaba más allá del aire comprimido. Con esto, los astros ya no eran cuerpos de fuego, sino el fruto de la visión a través de los orificios de las ruedas que dejaban pasar la luz y producían sonidos.

Surge así la idea de *esferas celestes que producen música* que ha llegado hasta nuestros días con periodos de mayor o menor influencia. Pero, para hablar de una auténtica armonía del cosmos hay que esperar a la escuela pitagórica. A ella se debe la idea de un universo gobernado por proporciones numéricas armoniosas y que el movimiento de los cuerpos celestes se corresponda con los intervalos musicales. Que el centro del universo lo ocupase la Tierra o un fuego central, en el modelo astronómico de Filolao, no obstaculizó la relación directa entre proporciones astronómicas y musicales. Y como veremos, ni siquiera cuando la Tierra es relegada a una situación mucho más discreta del Universo, o incluso cuando las órbitas dejan de ser circulares, se abandona la idea de armonía del universo.

El tema ha preocupado a tantos poetas, filósofos, músicos y científicos de todas las épocas, que resultaría ridículo intentar establecer aquí una enumeración exhaustiva de autores que han aportado ideas. A modo de ejemplo, si nos centramos sólo en pensadores españoles anteriores al siglo XVII, encontramos musicólogos y compositores, como Isaac ben Abraham ibn Latif (aprox. 1220 – 1290), Isaac ben Haim (1467 – después de 1518), Bartolomé Ramos de Pareja (1440 – después de 1491) o Francisco de Salinas (1513 – 1590), cuyas contribuciones han pasado a la historia.

Visto desde una perspectiva actual, parece incuestionable que, la aportación científica más importante al tema se debe a J. Kepler (1571 – 1630) con los cálculos que le sirvieron para reafirmarse en sus profundas creencias religiosas, pero no olvidemos que estaban hechos sobre seis planetas. Siglo y medio después de la muerte de Kepler se descubre Urano, y a mediados del siglo XIX aparece en escena Neptuno. Teniendo en cuenta esto, ¿tiene sentido seguir hablando de la música de las esferas desde un punto de vista matemático-musical?

Como veremos más adelante, Rudolf Haase a mediados del siglo XX, amplía el estudio de Kepler al resto de planetas (esta vez incorporando incluso Plutón) y comprueba que los intervalos de la *Justa Entonación* siguen siendo válidos. Y como dice J. Godwin (2009), “que todas las proporciones que aparecen al relacionar las velocidades angulares de los planetas se correspondan de forma muy aproximada con intervalos musicales que aparecen en la Justa Entonación, parece algo más que una pura casualidad”.

Hace unos diez años, surgió la noticia de que un satélite, enviado al espacio por la NASA, el *Transition Region and Coronal Explorer*, “había encontrado las primeras evidencias de música

originada en un cuerpo celeste”. Cuando se leía más detenidamente el reportaje, se informaba de que las ondas tenían frecuencias muy alejadas del espectro audible y que, además, eran difícilmente detectables. Siendo justos, a nadie se le ocurriría incluir los ultrasonidos que se utilizan para la rotura de cálculos de riñón, en las endoscopias o en algunos tratamientos de fisioterapia, dentro de las técnicas de la musicoterapia ... Pero está claro que hay una resistencia a abandonar la idea de Universo como un gran instrumento musical.

Como no podría ser de otra manera, lo que nos preocupa aquí es el significado o las herramientas matemáticas que se han manejado para justificar la música de las esferas. Por supuesto, esto no significa que el mito se haya transformado en ciencia, pero de los argumentos que se usaron allí dependen en gran medida las reglas de la música que seguimos manejando en nuestros días; y de una forma muy directa son los responsables de cuáles son las notas consideradas agradables y cuáles no.



❧ 3. LA MÚSICA DE LOS PITAGÓRICOS: EL NÚMERO HECHO ARMONÍA

Desde el primer milenio antes de Cristo, los caldeos relacionaron muy estrechamente la música con los astros y las matemáticas. Así, quienes estudiaban las estrellas explicaban el destino de los hombres y la armonía del Universo entrelazando la especulación matemática con los simbolismos. Esto dio lugar a que numerosos fenómenos cósmicos fuesen representados por la comparación entre las longitudes de cuerdas tirantes.

Ante esta perspectiva, el estudio de las propiedades de los números resultó una tarea fundamental que abría las puertas a la predicción de sucesos. En esta labor, como sostienen A. Robertson y D. Stevens (1989), destacaron mucho los números cuatro y siete, siendo esta última, probablemente, la cantidad de notas con las que contaba la antigua escala caldea.

Es posible que Pitágoras de Samos (aprox. 570 – 495 a. de C.), llevase las teorías de la música mesopotámica y los principios de la afinación a Grecia. Pero en su afán por atribuir a la música, como al resto de las cosas, un carácter numérico, no se conformó con una mera transmisión, sino que la reformuló en términos cuantitativos hasta convertirla en un compendio de métodos matemáticos.

La primera gran aportación pitagórica a la música es la deducción, de forma empírica, de que un sonido musical producido por una cuerda vibrante varía en razón inversa a su longitud, esto es: cuanto más corta sea la cuerda, más aguda será la nota producida. Este hecho les llevó a proponer el *monocordio* como instrumento para desarrollar sus teorías, para sustentar las hipótesis y como *material de laboratorio*.

Independientemente de sus experimentos, los pitagóricos, herederos de la tradición caldea, sostenían que las notas emitidas por los cuerpos celestes dependían de las proporciones aritméticas de las esferas en las que se movían. Los sonidos que producía cada órbita se combinaban con los sonidos de las restantes, produciendo una sincronía sonora conocida como la *música de las esferas*¹. Platón es muy explícito al respecto cuando, en la *República*, afirma que

“Por encima de cada uno de los bordes de los círculos iba una sirena, que giraba en su revolución y lanzaba un sonido, una nota, y entre las ocho se formaba la concordia de una sola armonía” (Neubauer, 1992).

Se trataba de un cosmos en el que se integraban las siete notas musicales con los siete cuerpos celestes conocidos en la época: el Sol, la Luna y los cinco planetas visibles (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno).

Como en la música mesopotámica, para los pitagóricos sólo existían cuatro intervalos consonantes, asociados con las cuatro estaciones del año y con las distancias entre los astros que ellos representaban comparando las longitudes de cuerdas tirantes (A. Robertson y D. Stevens, 1989):

$$1/1 = \text{unísono} \quad 1/2 = \text{octava} \quad 2/3 = \text{quinta} \quad 3/4 = \text{cuarta}.$$

Para producir todos los sonidos afinados (notas musicales) sólo se dispone de estos cuatro intervalos y sus combinaciones. Es decir, si hacemos sonar una cuerda tensa de longitud L , junto

¹. Dependiendo de la época y del pensador, el hecho de que no se oiga la música producida por las esferas celestes se justifica por la incapacidad humana, por la costumbre (ya que al oírla desde el nacimiento pasa despercebida), por la falta de intensidad, etc.

con otra que mide $1/2 \times L$, $2/3 \times L$ ó $3/4 \times 2/3 \times L$, por ejemplo, la sensación sería agradable: el intervalo sería consonante.

A partir de las cuatro posibilidades descritas, se pueden definir otros intervalos que han resultado fundamentales para la evolución de la música de nuestros días. Por ejemplo el *tono*, que es el intervalo que separa una cuarta de una quinta², se calcula como

$$\frac{3/4}{2/3} = \frac{8}{9}.$$

Haciendo uso de este intervalo, ha habido diferentes “medidas” de las distancias interplanetarias. Nosotros presentamos aquí la propuesta por F. Vera (1937):

Mercurio-Venus = 1/2 tono	Marte-Júpiter = 1/2 tono
Venus- Sol = 1+1/2 tonos	Júpiter-Saturno = 1+1/2 tonos
Tierra-Luna = 1 tono	Saturno-Zodiaco = 1+1/2 tonos
Luna- Marte = 1/2 tono	Total = 7 tonos

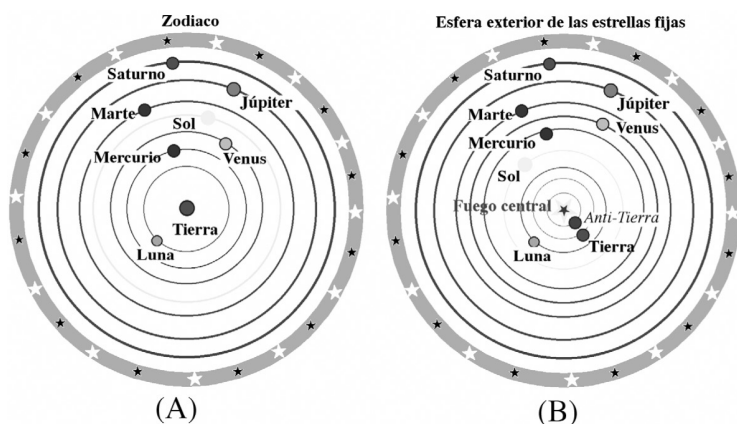
Pero los pitagóricos no se conformaron con “medir” distancias, sino que llegaron mucho más lejos en la armonía universal. Filolao de Tarento (480 – 400 a.C.), un discípulo de Pitágoras, relegó la Tierra del centro del Universo y propuso que daba vueltas en una esfera alrededor de un fuego central fijo. El Sol reflejaba este fuego central y junto con la Luna, los otros planetas y las estrellas, también circulaba alrededor del fuego central, cada uno en su esfera.

El modelo de Filolao parecía implicar la existencia de nueve esferas. Pero para los pitagóricos, de entre todos los números,

² Como los intervalos están expresados comparando partes de una cuerda de longitud L, los valores de las fracciones que se obtienen están entre 0 y 1. Si los expresásemos en función de las frecuencias (inversas a la longitud de la cuerda), el valor del tono, por ejemplo, sería 9/8.

la *década* representaba el de mayor carga simbólica, incluso sagrada, entre otras razones porque los cuatro primeros números contenían el secreto de la escala musical y su suma es diez, $1+2+3+4=10$. Muy probablemente esta fue una de las razones que impulsaron a Filolao a postular la existencia de otro planeta, la Anti-Tierra, que se situaba entre la Tierra y el fuego central, para “protegerla de los calores de éste” (Dreyer, 1953).

A pesar de lo revolucionario de la propuesta de Filolao, en su visión del universo, las proporciones musicales seguían manteniéndose, los intervalos consonantes caldeos no habían cambiado. Sin embargo, no hay una idea unánime de cómo se distribuían los tonos en el Universo de Filolao.



Esquemas del universo de los primeros pitagóricos (A) y de Filolao (B).

Sólo con el *tetractys*, los cuatro primeros números, y sus combinaciones, podía obtenerse el conjunto de todas las notas que servían para hacer música. La idea era que al dividir la cuerda en tres partes iguales cualquier cantidad de veces, el sonido obtenido será consonante con el de la cuerda original. Y lo mismo ocurre con la división en mitades. Si a esto le añadimos la agrupación en bloques de 7 (número de notas que proponían

los caldeos), ya podemos obtener cualquier nota a partir de una dada. Con esto habían creado un método muy eficaz para generar un número indefinido de sonidos válidos para hacer música.

Para expresar con mayor facilidad la forma de obtener las notas, las siete primeras las ordenamos como *fa, do, sol, re, la, mi, si*. Estas son las notas llamadas *naturales* y entre cada una y la siguiente, el cociente es $3/2$ ó $2/3$, según se haga la división. Si continuamos multiplicando sucesivamente por $3/2$, las siete notas siguientes se llaman alteradas con un sostenido, *fa[#], do[#], etc.*, y si a partir de las naturales optamos por dividir entre $2/3$, obtenemos las notas alteradas por un bemol, *si^b, mi^b, la^b, etc.*

A la vista de lo expuesto, está claro que siete es la cantidad de nombres de las notas que manejamos, pero en realidad, la inmensa mayoría de la música que escuchamos surge del uso de más sonidos, en general de las doce notas siguientes³:

$$do - do^{\#} - re - mi^b - mi - fa - fa^{\#} - sol - sol^{\#} - la - si^b - si.$$

Una manera axiomática de formalizar el método propuesto por los pitagóricos, en términos de frecuencias de las notas (en lugar de las longitudes de las cuerdas), es el siguiente:

- a) La música se basa en 7 notas.
- b) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por 3 cualquier número de veces (subimos o bajamos quintas).
- c) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por 2 cualquier número de veces.

³. En el temperamento igual, que es el sistema de afinación que se utiliza mayoritariamente en la actualidad, se dan las siguientes equivalencias: $do^{\#}=re^b$, $re^{\#}=mi^b$, $fa^{\#}=sol^b$, $sol^{\#}=la^b$, $la^{\#}=si^b$.

Una vez expresado así, el matemático actual se siente cómodo para manejar el sistema de afinación pitagórico. Basta con partir de la frecuencia f_0 de una nota afinada, por ejemplo la que produce el diapasón. El resto se obtienen multiplicando f_0 por potencias enteras de 2 y de 3. Y si esto lo llevamos todo a una octava, es decir al intervalo que va de f a $2f$, tenemos que la afinación pitagórica es una sucesión

$$a_n = 3^n / 2^{E(n \log_2 3)},$$

donde n es un número entero y $E(x)$ representa la parte entera por defecto del número real x .

Dificultades de la afinación pitagórica

El sistema creado por los pitagóricos, reflejo claro de su visión numérica del Universo, perduró hasta bien entrada la Edad Media. De hecho, hoy en día sigue siendo el preferido de muchos intérpretes de instrumentos de cuerda sin trastes.

El método que hemos descrito era capaz de generar una cantidad infinita de notas y parecía matemáticamente consistente. Sin embargo, la afinación pitagórica planteaba dos dificultades que eran insalvables. Para presentarlas de forma sencilla, vamos a describirlas en una circunferencia⁴:

- a) A pesar de que suponían que seis tonos equivalían a una octava, lo cierto es que no es así, porque $(9/8)^6$ no es lo mismo que 2. De hecho, con una potencia no nula de 2 no se puede conseguir una potencia de 3.

⁴. Esta idea es muy antigua (Robertson y Stevens, 1989) y a la circunferencia se le denomina "círculo de quintas".

- b) Como las notas pitagóricas no se distribuyen uniformemente (por ejemplo, hay dos tipos de semitonos), la nota que se toma como origen del sistema de afinación es fundamental y esto dificulta la modulación.

La primera de las dificultades citada nos asegura que suponer que alguna cantidad de notas pitagóricas va a cerrar el círculo de quintas es imposible, por lo tanto es necesaria la elección de un número adecuado de notas por octava.

Hasta que la polifonía no se iba abriendo paso en la escena musical, la afinación pitagórica era muy adecuada, pero cuando varias melodías empiezan a sonar simultáneamente, la distribución desigual de las notas hace que se produzcan disonancias entre las voces.

Como suele pasar en otros muchos escenarios de la vida real, estos problemas no supusieron graves inconvenientes para los músicos, porque evitaban las disonancias con pequeñas modificaciones en los instrumentos, alteraciones en la presión, etc.

La música en la época de Confucio

La armonía vinculada al cosmos no fue una idea exclusiva de Occidente. A la vez que las ideas pitagóricas se extendían desde Grecia, en China, sobre todo gracias al impulso de Confucio (aprox. 551 – 479 a. C.), los números también recuperaron un significado sagrado que los ligaba a la producción musical, estrechamente vinculada con la aritmética. No podemos olvidar que este contemporáneo de Pitágoras enseñaba a su pueblo el respeto al poder, a los eruditos que lo rodean, a los padres y a las tradiciones ancestrales. Su propuesta para conseguirlo es que

el hombre debe armonizarse con el cosmos, “ser acorde con lo ordenado por el cielo”.

Su filosofía se basó en Los Seis Libros Clásicos⁵, de los cuales, precisamente el Yüeh Ching (Libro de la música) desapareció en la quema de libros del siglo III a. C. En la época de Confucio, la música se basaba en las ideas del legendario matemático y filósofo Ling-Lun. Según una leyenda, el mítico emperador Huang-Ti⁶ quiso establecer la relación de la música con las leyes cósmicas. Para eso le encargó a Ling-Lun el trabajo de encontrar cuál era el sonido auténtico. El matemático, tras un largo viaje por los bosques más alejados del imperio, estableció como base de la música china un sistema pentatónico o pentafoanal logrado a través del corte de una caña de bambú hueca. Se dice que al principio tenía la longitud de 1 pie, luego cortó sucesivamente esa caña en una proporción de $2/3$ de su longitud original; es decir, la caña fue perdiendo cada vez un tercio de su longitud. Continuando con el proceso, obtuvo cinco notas que distaban una quinta entre sí, que al ordenarlas dan lugar a la escala pentatónica o de Ling-Lun⁷:

fa[#], sol[#], la[#], do[#], re[#].

A pesar de lo que podría parecer a primera vista, este sistema de afinación es idéntico al pitagórico. Si pensamos en los intervalos pitagóricos con frecuencias, en lugar de con las longitudes de cuerdas, éstos se traducen en $1/1$, $2/1$, $3/2$ y $4/3$.

⁵. Los Seis Libros clásicos fueron los de la Música, de las Mutaciones, de las Odas, de la Historia, de los Ritos y los Anales de primavera y otoño.

⁶. El Emperador Amarillo, también conocido como Huangdi, es una de las figuras más importantes de la mitología china. Se trata de uno de los Cinco Emperadores que reinó, según la tradición, desde el 2698 al 2598 a. C.

⁷. Se inicia la serie con el *fa[#]* porque es el sonido adoptado por el diapasón chino y, además, así la escala pentatónica se corresponde con las teclas negras del piano.

Combinarlos las veces que se quiera, no es otra cosa que dividir o multiplicar por 3 y por 2 esas mismas veces una frecuencia dada, y esto es exactamente lo mismo que se puede hacer con el sistema de Ling-Lun.



Marcha de Entrada del Emperador en el Templo, dinastía Chou
(1050 a. C. – 256 a. C).



❧ 4. AMPLIANDO LAS CONSONANCIAS: LA JUSTA ENTONACIÓN

Arquitas de Tarento (aprox. 430 – 360 a. C), un discípulo de Filolao, contemporáneo de Platón, advirtió que los intervalos pitagóricos $2/1$, $3/2$, $4/3$, son de la forma⁸ $(n+1)/n$. Teniendo en cuenta esto, propuso una subdivisión de los intervalos consonantes en intervalos que tuviesen la misma estructura. Con esto aparece otra relación importante, $5/4$, que representa *la tercera*. La incorporación de este nuevo intervalo⁹ da lugar a una nueva forma de elegir las notas, que se conoce como Justa Entonación. En ella, las consonancias pitagóricas, que se reducían a las razones entre los cuatro primeros números, son ampliadas hasta el *senario*, es decir los seis primeros números.

A pesar de que las primeras versiones de la Justa Entonación se deben a Aristóxeno de Tarento (360-300 a.C.), un discípulo de Aristóteles que sostiene que basta con el oído para conseguir la afinación, debemos a Gioseffo Zarlino (1517-1590) su formulación rigurosa y su popularización. Zarlino, un neopitagórico convencido, justificó los acordes con razones matemáticas que resultaron totalmente premonitorias de los armónicos. Estableció que los sonidos cuyas frecuencias son proporcionales a 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son consonantes, y comprobó que éstos eran emitidos por cuerdas de longitudes

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}.$$

⁸. A este tipo de razones se les llama superparticulares.

⁹. La tercera de la Justa entonación, $5/4$, es aproximadamente 21,5 cents más corta que la tercera pitagórica, $81/64$, y a esta distancia se le llama *comma sintónica*.

Para Zarlino, el número 6 jugaba un papel fundamental. Desde el punto de vista matemático, es un número que se obtiene como suma y como producto de sus divisores propios, $1+2+3=6$, $1\cdot2\cdot3=6$. Además, al multiplicar por 6 cualquier número acabado en 6, nos da un número que acaba en 6. A estas propiedades añadía la presencia del senario en el mundo: el número de planetas, los signos del zodiaco en cada hemisferio, las aristas de la pirámide triangular, las superficies del cubo, etc.

En realidad, la nueva forma de afinar, tardó mucho en llevarse a la práctica, porque a todos los inconvenientes de la afinación pitagórica añadía los que surgían al incorporar un nuevo intervalo: no existía un consenso de qué terceras sustituir por el nuevo valor y cuáles no. Sin embargo, lo cierto es que la “nueva tercera” sonaba más agradable al oído¹⁰ que la pitagórica. Hubo que esperar hasta el siglo XIX para que J. B. Fourier (1768 – 1830) diese una explicación matemática a esta sensación a través de los armónicos.

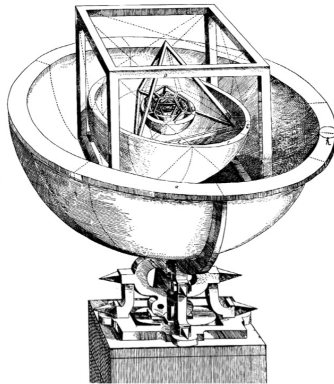
Ahora sabemos que cuando suena una nota musical de frecuencia f , también aparecen ondas de frecuencias $2f$, $3f$, ..., llamadas armónicos que son las que confieren a cada instrumento su timbre característico. En el sistema pitagórico, los únicos armónicos que pueden estar entre las notas afinadas son f , $2f$, $3f$ y $4f$, porque el 5 no era consonante en este sistema. En la Justa Entonación, están afinados los seis primeros armónicos, como había afirmado Zarlino siglos antes, basándose exclusivamente en la práctica. El hecho de que en haya más armónicos afinados hace que los intervalos entre las notas de este sistema suenen más naturales.

La aparición en escena del número 5 no podía dejar inmutable la armonía de las esferas de los pitagóricos. De hecho, hasta el

¹⁰. A los seguidores de la afinación de Aristóxeno se les llamaba “armonistas por el oído” para enfrentarlos a los pitagóricos que se basaban en cálculos.

siglo XVII fueron muchos los autores que se ocuparon de una armonía celestial, pero ninguno de ellos con la profundidad y precisión con que lo hizo Johannes Kepler (1571-1630). En su obra *Harmonices Mundi* (1619), Kepler estableció que cada planeta debería emitir un sonido cuya altura dependía de la velocidad, sería más agudo cuando su movimiento fuese más rápido, y variaría dentro de un intervalo musical bien definido y propio de cada planeta¹¹.

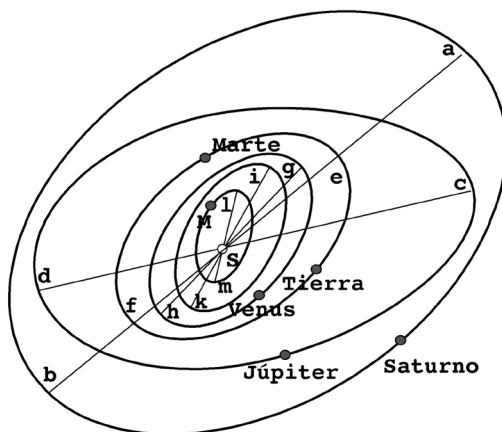
Firme partidario del modelo copernicano, consideró que el movimiento de los planetas debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía, e intentó demostrar que las distancias de los planetas al Sol venían dadas por esferas en el interior de poliedros perfectos, anidadas sucesivamente unas en el interior de otras. El orden, desde la mayor hasta la menor, sería el siguiente: Saturno – Cubo – Júpiter – Tetraedro – Marte – Dodecaedro – Tierra – Icosaedro – Venus – Octaedro – Mercurio.



Diseño de Kepler en *Mysterium Cosmographicum* (1596)
para expresar la armonía universal, aún con esferas.

¹¹. A pesar de su neopitagorismo, Kepler era consciente de la imposibilidad de percibir la música de las esferas: “Iam soni in coelo nulli existunt, nec tam turbulentus est motus, ut ex attritu aerae coelestis eliciatur stridor”.

Para Kepler, un modelo cosmológico tan perfecto era una prueba más de la existencia, sabiduría y elegancia de Dios. Pero no tardó en darse cuenta de que este arquetipo de poliedros perfectos no explicaba bien el movimiento de los planetas¹². La profunda religiosidad de Kepler, no le permitía aceptar que Dios no hubiera dispuesto que los planetas describieran figuras geométricas perfectas y con esta idea se dedicó a probar con toda suerte de combinaciones de círculos. Convencido de la imposibilidad de lograrlo con círculos, usó óvalos y finalmente, con gran decepción, empleó elipses. Con ellas llegó a las tres leyes¹³ que le revelaron como el mejor astrónomo de su época.



Sistema Solar de Kepler. Las letras a, c, e, g, i, indican la distancia más grande al Sol (afelios), y las restantes letras las distancias más pequeñas (perihelios).

¹². A la muerte de Tycho Brahe (1602), Kepler accede a todos los datos recopilados por Tycho y advierte que su sistema de poliedros no era sostenible.

¹³. Las tres leyes, publicadas en 1609 en su obra *Astronomía Nova*, pueden resumirse como:

1. Cada planeta describe, en sentido directo, una órbita elíptica, uno de cuyos focos está ocupado por el Sol.
2. El área descrita por el radio vector que une el centro de un planeta con el centro del Sol es proporcional al tiempo empleado en barrerla.
3. Los cuadrados de los tiempos de las revoluciones siderales de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

La falta de simplicidad en el Universo, que Kepler vivió como un fracaso, fue compensada de nuevo por la perfección de la Armonía Universal. Aseguró, por primera vez, que las órbitas de los planetas describen una elipse alrededor del Sol y que éste se encuentra en uno de los focos de la elipse.

Consideró que la velocidad angular de un planeta representaba el número de vibraciones de un cierto tono y, como la velocidad cambia a lo largo de la revolución, este sonido recorrería un intervalo musical entre el punto de mayor velocidad (el *perihelio*, punto más cercano al Sol) y el de menor velocidad (el *afelio* o punto más alejado del Sol).

De acuerdo con las leyes de Kepler, la amplitud de este intervalo dependería de la excentricidad de la órbita. Es difícil saber si estudiaba la excentricidad de las órbitas y por eso encontró los intervalos o fue al revés, para estudiar los intervalos necesitó estudiar las excentricidades. En cualquier caso, lo cierto es que utilizando las velocidades angulares obtuvo intervalos musicales asociados a cada planeta.

Planeta	Velocidad angular		Armonía	Intervalo
Saturno	Afelio	1' 46'' a	$\frac{1' 48''}{2' 15''} = \frac{4}{5} \rightarrow$	Tercera mayor
	Perihelio	2' 15'' b		
Júpiter	Afelio	4' 30'' c	$\frac{4' 35''}{5' 30''} = \frac{5}{6} \rightarrow$	Tercera menor
	Perihelio	5' 30'' d		
Marte	Afelio	26' 14'' e	$\frac{25' 21''}{38' 1''} = \frac{2}{3} \rightarrow$	Quinta
	Perihelio	38' 1'' f		
Tierra	Afelio	57' 3'' g	$\frac{57' 28''}{61' 18''} = \frac{15}{16} \rightarrow$	Semitono
	Perihelio	61' 18'' h		
Venus	Afelio	94' 50'' i	$\frac{94' 50''}{98' 47''} = \frac{24}{25} \rightarrow$	Diesis
	Perihelio	97' 37'' k		
Mercurio	Afelio	164' 0'' l	$\frac{164' 0''}{394' 0''} = \frac{5}{12} \rightarrow$	Octava+3ª menor
	Perihelio	384' 0'' m		
Urano	Afelio n	Perihelio o	$\frac{n}{o} = \frac{5}{6} \rightarrow$	Tercera menor
Neptuno	Afelio p	Perihelio q	$\frac{p}{q} = \frac{80}{81} \rightarrow$	Comma sintónica
Plutón	Afelio r	Perihelio s	$\frac{r}{s} = \frac{9}{25} \rightarrow$	Octava + 4ª aument.

Intervalos de cada planeta calculados por Kepler ,
junto con los obtenidos por Haase.

Además de una música individual de cada planeta, era necesario descubrir la armonía que regía las relaciones entre ellos. Para esto, Kepler comparó las velocidades en el afelio y el perihelio de un planeta con las del más próximo a él, obteniendo así dos tipos de intervalos:

- a) *Intervalo convergente*: relación entre la velocidad en el afelio del planeta más alejado y la del perihelio del más cercano.
- b) *Intervalo divergente*: relación entre la velocidad en el perihelio del planeta más alejado y la del afelio del más cercano.

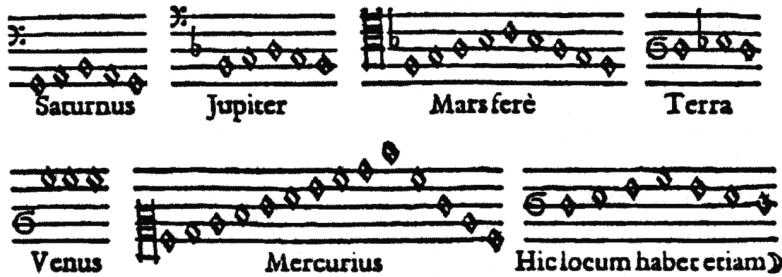
Con estos dos criterios calculó dos intervalos para cada par de planetas.

Planetas	Conv.	Diver.
Saturno-Júpiter	$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}$	$\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$
Júpiter-Marte	$\frac{c}{f} = \frac{1}{8}$	$\frac{d}{e} = \frac{5}{24}$
Marte-Tierra	$\frac{e}{h} = \frac{5}{12}$	$\frac{f}{g} = \frac{2}{3}$
Tierra-Venus	$\frac{g}{k} = \frac{3}{5}$	$\frac{h}{i} = \frac{5}{8}$
Venus-Mercurio	$\frac{i}{m} = \frac{1}{4}$	$\frac{k}{l} = \frac{3}{5}$

Planetas	Conv.	Diver.
Saturno-Urano	$\frac{a}{o} = \frac{5}{6}$	$\frac{b}{n} = \frac{3}{5}$
Urano-Neptuno	$\frac{n}{q} = \frac{5}{9}$	$\frac{o}{p} = \frac{9}{20}$
Neptuno-Plutón	$\frac{p}{s} = \frac{80}{81}$	$\frac{q}{r} = \frac{8}{18}$

Intervalos convergentes y divergentes calculados por Kepler, junto con los de Haase.

El paso siguiente fue asignar una melodía a cada planeta (y a la Luna). Para ello, fijó una nota y a partir de ella, basándose en las proporciones calculadas, ideó la melodía que debería producir cada astro. Sin subestimar el innegable parecido entre los valores obtenidos y las notas de la Justa Entonación, lo cierto es que Kepler ideó alguno de los compases de manera aproximada (es el caso de Marte) para que la coincidencia fuese aún mayor.



Música de los planetas, escrita por Kepler en *Harmonices Mundi* (1619).

Una vez convertidas las órbitas en elipses y adaptadas las ideas pitagóricas a esta circunstancia, fueron muchos los que se encargaron de mostrar diferentes aspectos de la remodelación de la armonía universal. Sin embargo, a pesar de los nuevos descubrimientos astronómicos¹⁴ y que el tema fue tratado por pensadores de primera línea como Robert Flud (1574 – 1637), Andreas Werckmeister (1645 – 1706), Isaac Newton (1642 – 1727) o Jean-Philippe Rameau (1683 – 1764), lo cierto es que, matemáticamente hablando, no aportaron prácticamente nada a los cálculos keplerianos. Hubo que esperar hasta mediados del siglo XX para que se diese un paso más en los cálculos de la música de las esferas.

Armonía de las esferas y Justa Entonación en el siglo XX

Cuando el profesor Rudolf Haase (1920 –) descubrió la obra de Hans Kayser (1891 – 1964) sobre armonía, emprendió su labor investigadora teniendo como objetivo la armonía de las esferas. Desde la Escuela Superior de Música y Artes Visuales de Viena y el Instituto Hans Kayser para la Investigación de los

¹⁴. Urano se descubrió en 1781, Neptuno en 1846 y Plutón, aunque ya no sea planeta, en 1930.

Principios Armónicos, Haase se ha convertido en el principal promotor de la armonía como tema multidisciplinar, especialmente con las matemáticas o la astronomía, y la ha relacionado muy estrechamente con el fenómeno de la serie armónica.

Desde el punto de vista matemático, lo que hace Haase es extender los principios de Kepler a los planetas descubiertos tras la muerte del astrónomo y contrastar sus propuestas con las de otros científicos, entre los que destacan el matemático y cabalista Francis Warrain (1867 – 1940) y los astrónomos¹⁵ J. D. Titius (1729 – 1796) y J. E. Bode (1747 – 1826). Además de obtener los intervalos keplerianos, Haase ha calculado otros muchos comparando velocidades en los afelios y los perihelios de dos planetas, que no tenían por qué ser consecutivos (Godwin, 2009). Los resultados obtenidos, que en parte aparecen en las tablas anteriores, sirvieron para corroborar que los intervalos siguen siendo, de manera muy aproximada, los que aparecen en la Justa Entonación.



¹⁵. A ellos se debe la ley de Titius-Bode que relaciona la distancia (en unidades astronómicas) de un planeta al Sol con el número de orden del planeta mediante la sucesión

$$d = \frac{3 \cdot m + 4}{10}, \quad m = 0, 2^0, 2^1, 2^2, \dots, K.$$

A pesar de la imprecisión para los planetas más lejanos, esta ley tuvo una gran importancia en el desarrollo de la Astronomía de finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX.

5. MÁS DE DOS SIGLOS DE CONTROVERSIAS A CAUSA DE LAS CONSONANCIAS

Hasta bien entrado el siglo XVIII, las afinaciones que se usaban normalmente en los estudios teóricos eran la pitagórica y la Justa Entonación. En ambas, la cantidad de notas por octava no está determinada *a priori*, pero normalmente este número se suele fijar en 12 notas. Como hemos visto, en estos sistemas de afinación las notas se generan con potencias y cocientes de los números 2 y 3 (pitagórico) o de los números 2, 3 y 5 (Justa Entonación).

Si consideramos una nota fija, por ejemplo el *do* de frecuencia $f = 264$ Hz, para obtener el resto de notas, hay que multiplicar por las fracciones siguientes:

	Do	Do [#]	Re	Mi ^b	Mi	Fa	Fa [#]	Sol	Sol [#]	La	Si ^b	Si
12 NOTAS		$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
PITAGÓRICAS	1											
12 NOTAS		$\frac{5^2}{3 \cdot 2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3 \cdot 2}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{3^2 \cdot 2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3 \cdot 5}{2^3}$
JUSTA ENTONACIÓN	1											

Si la frecuencia de la que partimos es 264 Hz, estas notas son las de la octava do_2 - do_3 . Para trasladarlas a otra octava, no hay más que multiplicar por una potencia de 2 adecuada. Así, si queremos trasladarla n octavas, multiplicamos sus valores por 2^n , con n un número entero.

Definiendo consonancia

No resulta fácil establecer una definición unánime de sonidos consonantes, de hecho debemos contentarnos con admitir que dos o más sonidos son consonantes si resultan agradables al oído. Evidentemente, este concepto, que depende mucho de

las diferentes culturas, ha evolucionado con el tiempo. Ante esta perspectiva, resulta complicado establecer una idea de consonancia de modo que resulte operativa. Entre todos los teóricos que han estudiado el tema, nos quedaremos con la versión del físico John Tyndall (1820 – 1893):

“Cuanto más simple es la relación de las frecuencias de dos sonidos, más consonante será el intervalo que forman.”

Este criterio, conocido con el desafortunado nombre de Teorema de Tyndall, no hizo más que recoger la idea con la que los musicólogos venían trabajando desde hacía siglos. Prueba de ello es la carta que L. Euler escribió a Federica Carlota Ludovica von Brandenburg Schwedt, princesa de Anhalt Dessau (1745–1808), en la que expone de forma casi literal el resultado de Tyndall:

Carta V: Del Unísono y de las Octavas:

“ [...] Vuestra Alteza comprenderá fácilmente que cuanto más simple sea la proporción [entre las frecuencias], o expresada con menores números, más distantemente se presenta al entendimiento y presenta un mayor sentimiento de placer [...].”

3 de mayo de 1760

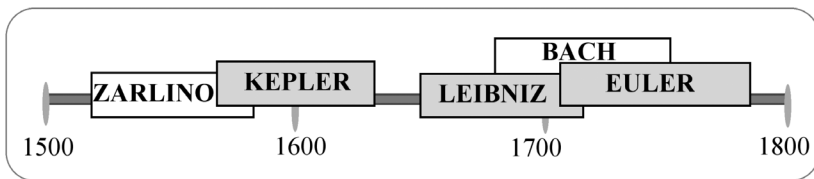
Según este criterio, las consonancias pueden ordenarse de la forma siguiente:

$1/1$ Unísono > $2/1$ Octava > $3/2$ Quinta > $4/3$ Cuarta > $5/4$ Tercera mayor > $5/3$ Sexta mayor > $6/5$ Tercera menor > $8/5$ Sexta menor > ...

Pero, a pesar de su aparente sencillez, con esta ordenación surgen problemas con los que han tenido que pelear muchos musicólogos y matemáticos posteriores al siglo XVI. Desde un punto de vista matemático, la cuestión que se plantea es fácil de enunciar: ¿la ordenación de las consonancias es válida para cualquier cociente entre números naturales o sólo cuando los números son productos de potencias de 2, 3 y 5?

Para intentar dar una respuesta a esa cuestión, nos hacemos una pregunta menos ambiciosa: ¿Qué ocurriría con las consonancias si además añadimos las potencias de 7?

Por inocente que parezca, intentar responder a esa pregunta ha dado pie a varios siglos de discusiones. De hecho, nuestro objetivo no es hacer un análisis exhaustivo del uso del número siete en la música, sino ofrecer una visión global a través de algunos trabajos. Y para esto resultan esenciales las aportaciones de G. Zarlino (1517-1590), J. Kepler (1571-1630), G. W. Leibniz (1646-1716), J. S. Bach (1685-1750) y L. Euler (1707- 1783), quienes contribuyeron de forma decisiva a reavivar la controversia que el siete ha suscitado en la música. Cualquiera de estos cinco autores merecería un estudio detallado, sin embargo aquí destacaremos algunas aportaciones que reflejan argumentos a favor y en contra de su uso.



Por un lado, a partir del siglo XVI, algunos compositores y músicos empiezan a hacer uso de intervalos que habían estado prohibidos. Sirva como ejemplo un fragmento de la polémica entre C. Monteverdi (1567 – 1643), representante de la nueva

música, y G. M. Artusi (1540 – 1613), partidario de la música tradicional (Liern, 2008):

“No niego que inventar cosas nuevas esté bien; incluso es necesario. Sin embargo, decidme: ¿a qué se debe que queráis hacer uso de aquellas disonancias de la misma manera que las emplean éstos [los músicos ‘modernos’]? Si lo hacéis porque pretendéis que se oigan de modo manifiesto [...] ¿por qué no las usáis de la manera habitual, razonadamente, según en la forma en que compusieron Adriano, Cipriano, Palestrina [...]?”

Por otro lado, con la ordenación de las consonancias que establecíamos anteriormente, no resulta sencillo justificar por qué es más consonante $8/5$ que $7/5$, ya que tanto el numerador como el denominador son más grandes (o iguales) y $8/5$ se aleja más del unísono. Como veremos a continuación, de nuevo el número siete está en la esencia de estas cuestiones.

Defensa del senario: Zarlino y Kepler

Muy influido por el neoplatonismo florentino, G. Zarlino veía la esencia numérica en todas las cosas. En el capítulo catorce de las *Institutioni* hace una defensa del senario como límite para las consonancias, pero esto le plantea un problema: hemos dicho que la sexta menor, $8/5$, se considera una consonancia, y sin embargo tiene en sus términos el ocho que no pertenece al senario. ¿Por qué no proponer el *ottonario* como recinto de las consonancias? Evidentemente, aceptar el ocho significaría dar cabida al número siete y los intervalos formados con este número, $7/6$ y $8/7$, a los que se considera disonancias sin paliativos.

Zarlino, consciente de que el problema tenía difícil solución, recurre a argumentos filosófico-numéricos para resolverlo. Para él, las fracciones $8/5$ y $7/6$ contienen números de naturaleza muy diferente, porque 8 es 2^3 , lo cual significa que incluir $8/5$ no supone incorporar números primos que no estén contenidos en el senario, mientras que aceptar el 7 escapa de los seis primeros números. Además, sus argumentos se apoyan en la distinción aristotélica entre potencia y acto. Para Zarlino, $8/5$ se encuentra en el senario en potencia, pero no en acto y aprovecha esto para justificar que las consonancias que surgen con el senario sean “consonancias propiamente dichas” mientras que la sexta menor produce una “consonancia comúnmente dicha”.

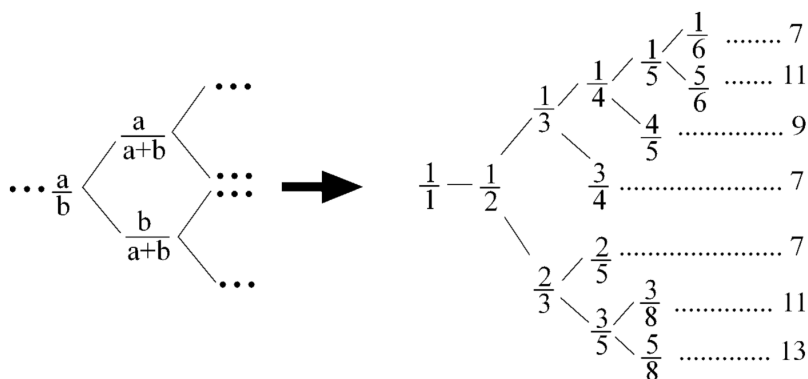
Como era de esperar, los razonamientos de Zarlino no fueron capaces de convencer a muchos musicólogos de la época, de ahí que otros autores, como F. Salinas (1513 - 1590), hicieran una defensa más práctica argumentando que en realidad $8/5$ era consonante por ser complementario de la tercera mayor ($5/4$),

$$\text{sexta menor} + \text{tercera mayor} = \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{4} = 2,$$

es decir que entre ambos intervalos cubren toda la octava.

Habría que esperar más de medio siglo hasta que Kepler, en *Harmonices mundi* (1619) proporcione razonamientos más consistentes. Convencido, como los pitagóricos, de que la armonía de la música y la del universo no eran más que dos representaciones de una misma realidad, Kepler basa las proporciones armónicas en los polígonos regulares. Para esto necesitaba quedarse con una cantidad finita de polígonos. La manera de elegirlos fue asociar la condición de ser construible con regla y compás con la capacidad de generar proporciones consonantes.

Con esta intención, ideó un método que, aparentemente, resolvía, de una vez por todas, los problemas de no aceptar $7/6$ u $8/7$ pero aceptar $5/8$. El método consistía en generar un árbol de consonancias en el que cada fracción a/b , en el paso n genera dos fracciones, $a/(a+b)$ y $b/(a+b)$, en el paso $n+1$. Partía de la fracción $1/1$ y el proceso continuaba hasta que se llegase a un denominador que representase los lados de un polígono regular no construible con regla y compás.



En el árbol propuesto aparecían todos los intervalos consonantes y no era necesario aceptar ninguna excepción.

Durante más de siglo y medio, los argumentos de Kepler parecían sólidos, pero después, en menos de veinticinco años, sus justificaciones se desmoronaron. Por un lado, W. Herschel, precisamente un músico de la corte del rey Jorge III de Inglaterra, descubrió Urano en 1781 y, pocos años después, C. F. Gauss (1777 – 1855) demostró que se podía construir con regla y compás el polígono regular de 17 lados.

Leibniz, Bach, Euler y los números concordes¹⁶

A pesar de que Leibniz escribió poco sobre música, además de ser el autor de varias de las frases¹⁷ más citadas en Música y Matemáticas, participó en la polémica del número siete. Su producción en este tema se reduce a varias cartas escritas a C. Goldbach (1690 – 1764). En una de éstas, fechada el 17 de abril de 1712, a pesar de que concede la posibilidad de que el número siete sea capaz de generar sonidos agradables, no deja de verlo como algo anecdótico:

“En música, no contamos más allá del cinco, similares en esto a esta gente que, hablando también de aritmética, no pasaban del número tres y dieron lugar al dicho alemán sobre los simples: ‘es tan simple que no sabe contar más de tres’. Todos nuestros intervalos en uso vienen en efecto de razones formadas por los pares de los números primos 1, 2, 3, 5. Si tuviéramos la suerte de un poco más de finura, podríamos llegar hasta el número primo 7. Y pienso que realmente hay gente en este caso. Esta es la razón por la que los antiguos no rechazaban completamente el número 7. Pero apenas habrá gente, que llegaría hasta los números primos [siguientes] más cercanos, 11 y 13.”

A pesar de que varios autores del siglo XVIII utilizan la séptima en sus composiciones, y de la innegable revolución que supone *El clave bien temperado* (1722, 1740) de J. S. Bach (en el que, por supuesto aparecen séptimas y otros intervalos considerados

¹⁶. Al final de esta sección presentamos un fragmento de la Oda a F. Salinas, escrita por Fray Luis de León, en la que aparece la expresión “números concordes” relacionándolos con la armonía de las esferas.

¹⁷. La cita es “La música es un ejercicio matemático inconsciente en el que la mente no sabe que está calculando”.

disonantes), los científicos y teóricos de la música se mantienen fieles en su renuncia al número siete como generador de consonancias. Una prueba contundente de ello es la última frase de la carta que Euler escribió a la princesa de Anhalt Dessau en 1760 (Euler, 1990):

Carta VII: De los doce tonos del clavecín:

“Mi intención era presentar a Vuestra Alteza el verdadero origen de los sonidos empleados en la música. [...] Los principios de la Armonía se reducen en último término a números, [...] el número 2 produce sólo octavas [...]. Después el número 3 produce los tonos que difieren de los anteriores en una quinta. Pero introduzcamos también el número 5 y veamos cuál sería el tono que produce 5 vibraciones, mientras que el F no hace más que una. [...]. Es llamado una tercera mayor y produce una consonancia muy agradable, estando contenido en una proporción de números bastante pequeña, 4 y 5. [...] Si se quisiera también introducir el número 7, el número de tonos de una octava sería mayor, y se llevaría toda la música a un grado más alto. Pero aquí la Matemática abandona la armonía a la Música.”

3 de mayo de 1760

Pero el ingenio de Euler no podía permanecer ajeno a la música que se estaba haciendo en su época, y seis años después de haber escrito la carta anterior, en su *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* (Euler, 1766a), no sólo se desdice de la última frase de la carta anterior y propone el número 7 como uno de los artífices de la música, sino que aprovecha la ocasión para rectificar a Leibniz.

“Se sostiene generalmente que no nos servimos en la música más que de las proporciones compuestas por estos tres números primos 2, 3 y 5 y el gran Leibniz ha advertido ya, que en la música no se ha aprendido aún a contar más allá del 5; lo cual es incontestablemente cierto en los instrumentos afinados según la armonía. Pero, si mi conjetura se cumple, se puede decir que en la composición se cuenta ya hasta el 7 y que el oído está ya acostumbrado; es un nuevo género de música, que se ha comenzado a usar y que era desconocida por los antiguos. En este género el acorde 4, 5, 6, 7 es la armonía más completa, puesto que contiene los números 2, 3, 5 y 7; pero también resulta más complicado que el acorde perfecto en el género habitual que no contiene más que los números 2, 3 y 5. Si ésta es una perfección en la composición, quizá se hará lo posible por llevar los instrumentos al mismo grado.”

Posteriormente, Euler cuando aborda el carácter de la Música Moderna (Euler, 1766b) presenta un sistema de afinación en el que aparece el número siete, aunque quizá por parecerle excesivamente atrevido, a los tonos en los que aparecen potencias de 7 les denomina “extraños”, frente a los tonos “principales” en los que sólo aparecen potencias de los números 2, 3 y 5.

Euler y el grado de suavidad entre sonidos

Un matemático de la talla de Euler, sabía que el problema de medir las consonancias no se zanjaba con unos cuantos comentarios, y quizás por ello dedicó tres de sus trabajos a medir el grado de suavidad entre dos sonidos (Euler, 1766a, 1766b). Introdujo el *gradus suavitatis* distinguiendo muchos casos, lo

que permitió que los razonamientos musicales y aritméticos se introdujesen de forma gradual. Sin embargo, aquí lo expresaremos en un lenguaje más operativo.

El grado de suavidad de un intervalo musical, es decir de una razón a/b siendo a y b números cualesquiera, se puede calcular de la forma siguiente:

Dada la fracción a/b , consideramos la fracción irreducible equivalente p/q , calculamos N el mínimo común múltiplo de p y q , y lo descomponemos en factores primos

$$N = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \dots \times p_n^{k_n}.$$

El grado de suavidad entre a y b (o del intervalo a/b) se define como

$$GS(a:b) = k_1(p_1 - 1) + k_2(p_2 - 1) + \dots + k_n(p_n - 1) + 1.$$

Con esto, los grados de suavidad de algunos intervalos muy conocidos, como la quinta justa, $3/2$, cuarta justa, $4/3$ y séptima “natural” $7/4$, son los siguientes:

$$GS(4:3) = 2(2 - 1) + 1(3 - 1) + 1 = 5,$$

$$GS(3:2) = 1(2 - 1) + 1(3 - 1) + 1 = 4,$$

$$GS(7:4) = 1(7 - 1) + 2(2 - 1) + 1 = 9.$$

Esto significa que la quinta es más consonante que la cuarta y ésta a su vez lo es más que la séptima, pero más allá de lo anecdótico de estos intervalos, lo que ocurre es que, por primera vez, se tiene una medida de las consonancias.

El método no sólo sirvió para confirmar las teorías que los músicos aceptaban para los intervalos, sino que permite calcular

con facilidad el *gradus suavitatis* de relaciones más complejas. Por ejemplo, si en lugar de intervalos queremos calcular los grados de suavidad de acordes, tenemos que, para el acorde mayor 4:5:6, el grado de suavidad es el de 1/60, es decir $GS(4:5:6) = 2(2-1) + 1(3-1) + 1(5-1) + 1 = 9$.

Es cierto que, en materia musical, Euler dejó muchas cosas sin explicar. Por ejemplo, el grado de suavidad de a:b:c es el mismo que el de b:c:a. Sin embargo, estas dos situaciones, que se conocen como inversión de acordes, no se perciben de igual forma.

Pocos investigadores de la época de Euler podían imaginar que surgiría la Psicoacústica como una área de conocimiento. En el momento actual, aceptar que podemos dar reglas generales de percepción a partir de la descomposición en factores primos, resulta poco realista. Si a esto añadimos que los sistemas de afinación no tienen por qué basarse en la relación entre números naturales, parecería que la utilidad de estos trabajos es más que cuestionable.

Sin embargo, a pesar del apriorismo de sus propuestas, Euler hizo avanzar mucho la concepción de la teoría musical. Desde mediados del siglo XVII la separación entre la teoría y la práctica musicales se estaba haciendo insostenible. Las reglas rígidas de afinación, de armonía o estructurales parecían un tema de los teóricos, mientras que compositores e intérpretes estaban dispuestos a ignorarlas constantemente.

Después de algunas revoluciones como habían sido *El clave bien temperado* de Bach, o la aparición del *pianoforte*, con todas sus posibilidades acústicas, era necesario un golpe de timón en un mundo en el que la ciencia se estaba imponiendo. Y, para este cambio de rumbo, pocos estaban tan autorizados como Euler.

Pero, ¿puede estar desafinada la Naturaleza?

En el siglo XIX, J. B. Fourier (1768 – 1830) abre una nueva brecha en la cuestión del número siete. Uno de sus resultados más célebres y, sin duda, el más utilizado en música, es que cualquier función periódica continua se puede descomponer en funciones periódicas simples.

Esto significa que si un instrumento produce una nota, la onda sonora se puede descomponer en ondas simples con frecuencias $1f$, $2f$, $3f$, ..., denominadas *armónico primero*, *segundo*, etc. La amplitud de cada uno de los armónicos es lo que configura el timbre del instrumento y hace que distingamos el *do* de un piano del *do* de una trompeta.

Normalmente, al expresar estos armónicos en un pentagrama, al séptimo armónico se le adjunta una flecha, o un cambio de grafía, que indica la desafinación.



Puede diseñarse un sistema de afinación en el que el séptimo armónico esté afinado, pero esto no zanja la cuestión. En primer lugar, en este sistema se modifica ligeramente la afinación habitual de todas las notas y, en segundo lugar, ¿por qué contentarnos con el séptimo armónico y no seguir con el undécimo, el decimotercero, etc. que también están desafinados?

Realmente, que estas cuestiones permanezcan sin resolver no supone ningún problema práctico, pero afirmar que algunos armónicos de una nota emitida por un cantante están desafinados, es admitir que la naturaleza está desafinada. Está claro que en los criterios para elegir las notas musicales, los argumentos basados

en la física del sonido se entremezclan con los netamente socio-culturales, y éstos no tienen por qué coincidir. Desde luego, esta desafinación no ha supuesto ningún inconveniente para seguir disfrutando de la belleza de la Música, pero, ¿no rompe esto con una tradición de más de veinticinco siglos en los que la armonía del Universo y de la Música eran una misma cosa?

Quizás, no admitir esta ruptura ha hecho que algunos compositores del siglo XX, como Z. Kodály, B. Bartók, I. Xenakis o W. R. Lutoslawski, por ejemplo, no sólo hagan intervenir el número siete en la afinación de muchos de sus acordes, sino que realmente den un paso adelante hacia una relación explícita, que no ha cesado, entre las Matemáticas y la composición musical.

[...] Traspasa el aire todo
hasta llegar a la más alta esfera,
y oye allí otro modo
de no perecedera
música, que es la fuente y la primera.

Ve cómo el gran maestro,
aquesta inmensa cítara aplicado,
con movimiento diestro
produce el son sagrado,
con que este eterno templo es sustentado.

Y como está compuesta
de números concordes, luego envía
consonante respuesta;
y entrambas a porfía
se mezcla una dulcísima armonía. [...]

Fragmento de la *Oda III – A Francisco de Salinas*
de Fray Luis de León (1527 –1591)



❧ 6. EL TRIUNFO DE LAS APROXIMACIONES

Como hemos comentado, las notas que aparecen con las afinaciones anteriores, se corresponden con algunos de los armónicos naturales, los que aparecen en la teoría de Fourier, pero está claro que no son apropiados para la música polifónica.

El hecho de que las notas no cierren el círculo de quintas y que no se distribuyan uniformemente, hace que, al menos desde el siglo XV, los intérpretes tuviesen que cerrar el círculo “ajustando” (temperando) sus instrumentos. Se trataba de una necesidad a la que los teóricos eran incapaces de llegar de forma unánime.

Para formular el problema, nos centramos en el sistema pitagórico, porque al manejar sólo quintas, resulta más sencillo de exponer. Si una nota la subimos 12 quintas y la bajamos 7 octavas (o equivalentemente la subimos 6 tonos), el resultado no es el mismo que si la subimos una octava. La razón es que la duodécima quinta no cierra el círculo de quintas, sino que lo sobrepasa ligeramente,

$$2^7 = 128, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,7463.$$

La diferencia entre estos dos valores se llama *comma pitagórica* y su tamaño es de unos 23,46 cents, menos de la cuarta parte de un semitono. Por pequeña que parezca, evitar adecuadamente esta imprecisión ha sido uno de los principales quebraderos de cabeza de los musicólogos a lo largo de varios siglos, puesto que dependiendo del punto de partida, el desajuste se produce en una nota u otra.

A lo largo de la Historia, han aparecido multitud de propuestas, que básicamente se pueden resumir en dos formas de proceder:

- a) Quitar toda la imprecisión en una de las doce quintas.
- b) Repartir porciones de *comma* entre varias o todas las quintas.

La primera de las opciones genera una quinta bastante más pequeña, denominada *quinta del lobo*, que produce un sonido desagradable. Esto hizo que no se pudiese utilizar e imposibilitaba el uso de algunas tonalidades. En estas circunstancias, la transposición o la convivencia de algunos instrumentos dentro de la misma agrupación se hacía imposible.

La segunda de las opciones implica llegar a un consenso en qué porción quitar a cada quinta, porque esto determina la nueva distribución de notas temperadas. Además, dependiendo de cómo se haga, sigue habiendo intervalos y tonalidades que resultan impracticables.

Mientras las composiciones se hacían para pocos instrumentos, esta dificultad no resultaba grave, pero en el Barroco, al aumentar el número de voces, el problema se hace insostenible, sobre todo si pensamos que la simultaneidad de las voces se convierte en una herramienta fundamental de las obras.

Si esta cuestión se hubiese planteado como un problema matemático sin más repercusiones, lo cierto es que la mejor solución era evidente: “hay que dividir el círculo en partes iguales”. Así, por ejemplo, para 12 partes, cada una de ellas medirá $\sqrt[12]{2}$, es decir 100 cents. Por trivial que parezca la respuesta, esta forma de afinar es el *Temperamento igual doce de notas* que, con diferencia, es el más utilizado en la música occidental actual. Pero claro está, la forma con la que se llegó hasta este temperamento no fue tan sencilla.

El valor de las demostraciones constructivas

En Matemáticas, cuando las demostraciones son constructivas tienen un valor añadido. Por ejemplo, cuando en un teorema de existencia de soluciones además de demostrar que existe, la prueba indica cómo calcularla, el resultado es mucho más útil.

Esto es lo que ocurrió con J. S. Bach y *El clave bien temperado*¹⁸. Necesitaba dar una solución práctica que acabase con las dificultades de poder interpretar en todas las tonalidades y a la vez zanjase las discusiones sobre qué temperamentos o qué sistemas de afinación eran los más adecuados.

Bach, a pesar de pertenecer a la *Sozietät der Musicalischen Wissenschaften* (Sociedad de las Ciencias Musicales), que tenía como finalidad estudiar la relación entre Música y Matemáticas, no era un apasionado de la parte científica de la música. En palabras de su hijo Carl Philipp Emanuel, “no se dejaba arrastrar por profundas consideraciones teóricas y dedicaba, en su lugar, sus energías a la práctica”.

Pero Johann Sebastian, además de ser un extraordinario compositor e intérprete, era constructor y reparador de órganos. Sabía que contar con soluciones teóricas plausibles no era suficiente, necesitaba soluciones que conjugasen teoría, práctica y que gozase de consenso: quería obtener una demostración constructiva.

Como es de suponer, cada uno de los temperamentos que circulaban a principios del siglo XVIII, con sus ventajas e inconvenientes, tenían sus seguidores y esto hacía que la situación

¹⁸. La expresión “bien temperado” no designa un temperamento concreto. Que el temperamento sea bueno no significa que sea mejor que los otros, hace alusión a que permite cerrar el círculo de quintas y, por tanto, la modulación en todas las tonalidades.

fuese realmente complicada. Probablemente si Bach se hubiese dedicado a defender un temperamento, desde un punto de vista teórico, su propuesta no habría sido efectiva, por esto, para zanjar el problema era necesario construir la solución: componer *El clave bien temperado*. Esta obra, que no se imprimió en vida del autor, consta de dos volúmenes con preludios y fugas compuestos en todas las tonalidades mayores y menores de la gama cromática y su principal objetivo era mostrar que su propuesta era viable y sonaba bien.

Fue una composición, como gran parte de la obra de Bach, ignorada por la mayoría de sus contemporáneos, pero la revolución se había iniciado, y el hecho de que, por primera vez, el temperamento se desligase explícitamente de la idea de “truco práctico” de los intérpretes, ya no tenía vuelta atrás: el temperamento formaba parte de la esencia misma de la composición.

Sería injusto no reconocerle al genial compositor que, a pesar de la carta que su hijo Carl Philipp Emanuel escribió a J. N. Forkel advirtiéndole que su padre “no era amante del seco material matemático”, lo cierto es que la grandeza estructural de sus obras, así como la manera de zanjar un problema secular a través de *El clave bien temperado*, son formas brillantes de hacer Matemáticas.

Música de las esferas y temperamentos

Aunque sea de forma colateral, el hecho de relacionar la música con el cosmos ha servido para encontrar argumentos a favor de las teorías musicales. Así, la idea de un universo formado por esferas concéntricas sirvió para validar la afinación pitagórica en la que sólo participan los números dos y tres. Sin embargo, cuando la situación se fue complicando y las circunferencias se

transformaron en elipses, la que salió beneficiada fue la Justa Entonación, en la que se utilizan el dos, el tres y el cinco. No obstante, la idea original de búsqueda de una conexión entre el universo y la música, más allá de lo estrictamente matemático sigue inspirando a los músicos, que ven en la serie armónica o la teoría del caos una fuente de ideas. Como muestra de esta inspiración daremos aquí dos ejemplos próximos a mi trabajo. El primero, *Esferas*, es una obra escrita en la tesis doctoral de José Ibáñez Barrachina (Ibáñez, 2008), en la que se utilizan los intervalos dados de Kepler y el segundo, *Music of the Spheres*, de Mike Oldfield, es un trabajo que se basa en la interpretación libre que el compositor hace de las ideas tratadas aquí.

En *Esferas*, estrenada el 24 de noviembre de 2006, en la VIII reunión de Decanos y Directores de Matemáticas, los sonidos propuestos por Kepler se mezclan con otros, de manera que se escuchan de forma simultánea las notas originales, completamente tonales, junto con melodías elaboradas por el compositor a partir de sonidos que huyen de la tonalidad. En los cálculos de Kepler, la única excepción a la música tonal más ortodoxa la constituyen el intervalo que representa a la Tierra: el semitono. Este intervalo, prohibido durante largo tiempo, es aceptado en el Barroco “mientras sea utilizado con medida y no como el material básico para la elaboración de una obra” y está presente en todos los cromatismos del S. XIX. Además, se combinan dos tipos de series, una establecida por Kepler y otra diseñada por el compositor variando la anterior. La técnica de composición, sin llegar al dodecafonismo, está inspirada en el método de Arnold Schönberg.

Pocos meses después del estreno de *Esferas*, cuando Mike Oldfield, manifestó en numerosas entrevistas promocionales que estaba trabajando en su álbum *Music of the Spheres*, hubo algún periodista que se puso en contacto con Ibáñez y con su director

de tesis para comprobar si había habido relación entre ambas obras. Lo cierto es que ni los autores ni las obras habían tenido ningún tipo de relación y lo único que les unía era el tema.

Music of the Spheres es un disco compuesto para orquesta sinfónica, y que cuenta con secciones interpretadas por coro, soprano y guitarra clásica que interpreta el propio Mike Oldfield. Está diseñado con melodías minimalistas, cambios de texturas armónicas y tonos melódicos que en nada tienen en cuenta los intervalos keplerianos o los cálculos a los que hemos hecho referencia en este trabajo. A pesar de ello, está claro que la idea de búsqueda armonía entre los astros sigue siendo fuente de inspiración de creadores musicales.



❧ 7. Las esferas y las consonancias que usan los músicos

Como hemos visto hasta ahora, los astros dejaron la perfección de las órbitas circulares para achatarse y dar paso a elipses y esto tuvo sus repercusiones en la percepción de la *armonía universal*. Sin embargo, éstos no iban a ser los únicos cambios. Hace unos veinticinco años, las esferas que describían lo más íntimo de la materia, las partículas elementales, dejaron de ser precisas para convertirse en *esferas borrosas* (Madore, 1992). Ante esta perspectiva, ¿podemos seguir obstinados en buscar unas consonancias exactas dentro de una armonía perfecta?

Está claro que, una cuestión es explorar el territorio común entre las Matemáticas y la Música y otra bien distinta es cómo transitan por él los intérpretes. Como ocurre en otros campos en los que se aplican las Matemáticas, los modelos y las soluciones que proporcionan éstos, muchas veces se utilizan como una aproximación a la realidad. Por ejemplo, las notas musicales, se definen para cada sistema de afinación con unas frecuencias muy precisas, pero el músico sabe que una pequeña alteración de estos valores no es grave. De hecho, en ocasiones sólo se llega al consenso de toda una agrupación musical si parte de los músicos alteran la afinación teórica. Por otro lado, hemos presentado la partitura como la gráfica de una función que el músico utiliza realmente como la aproximación a una fórmula matemática. ¿Quiere decir esto que el músico debe restringir el uso de las Matemáticas a los aspectos teóricos y en su vida profesional debe guiarse por la intuición?

Me gustaría abordar un último aspecto en mi discurso, muy relacionado con mi investigación más reciente. Se trata de mostrar, de forma breve, que en realidad lo que ocurre es que los músicos manejan procesos matemáticos más complejos que los

habitualmente presentados en los trabajos de Música y Matemáticas. En la mayoría de los casos, deben incluir en los propios conceptos un grado de incertidumbre que sea capaz de reflejar la imprecisión, los criterios personales e incluso el estado de ánimo.

Para expresar esta idea, conviene que tengamos en cuenta la diferencia entre azar e incertidumbre. Aunque son dos palabras ligadas de forma más o menos directa con la probabilidad y en el lenguaje ordinario muchas veces se confunden, el significado no es el mismo. Cuando se ponen en una urna 7 bolas rojas y 3 blancas, la probabilidad de sacar una bola roja es $7/10$ mientras que la de sacar una blanca es de $3/10$. Dicho de otro modo, en una extracción aleatoria se puede medir la suerte de sacar una bola blanca o una roja. Supongamos ahora que desconocemos la proporción de bolas de cada color y que sólo podemos realizar una extracción. En estas circunstancias ya no podemos medir la suerte. El fenómeno ya no se debe al azar, sino a la incertidumbre.

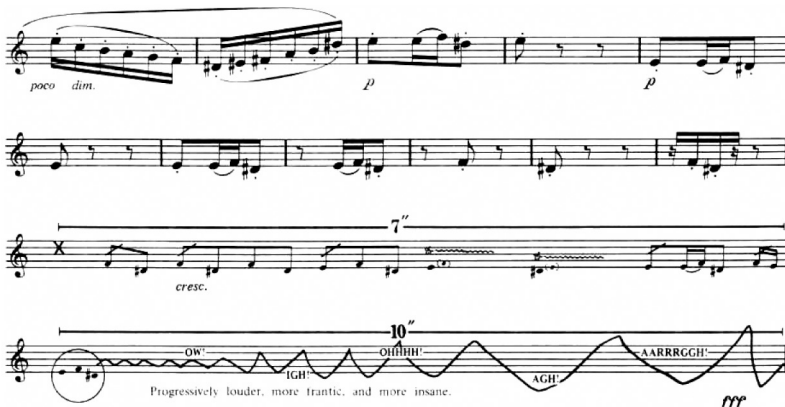
A nosotros nos va a interesar el tratamiento de la incertidumbre en la que no tiene sentido que se le aplique la probabilidad, porque precisamente ésta es la que aparece en la Música, y en muchas manifestaciones de la vida real en las que participan las decisiones de personas.

Sin entrar en cuestiones psicológicas (como estado emocional de cada uno de los intérpretes) ni en las características arquitectónicas o ambientales de las salas de audición, la propia partitura contiene diversas fuentes de incertidumbre que debemos tener en cuenta:

- a) La altura de las notas: Cada familia de instrumentos afina, de forma natural, en sistemas de afinación distintos.

Por ejemplo, un *la^b* no designa una única realidad físico-acústica.

- b) La grafía del pentagrama: En la música contemporánea el compositor tiende a expresar, mediante gráficos o notación no estándar, algunos efectos que no tenían cabida en la música clásica y que dan mayor grado de libertad al intérprete.
- c) El tempo: A pesar de la tendencia actual a sustituir las designaciones tradicionales de tempos por indicaciones más precisas, que expresan pulsaciones por minuto, la imprecisión es inevitable, máxime cuando a estos se añaden términos que modifican la velocidad del movimiento de forma gradual (accelerando, ritardando, etc.).
- d) Los matices: Los términos que indican la intensidad del sonido (de menor a mayor, pianissimo, piano, mezzopiano, mezzoforte, forte, fortissimo) son imprecisos, sobre todo si además se añade que aumenten o disminuyan gradualmente la intensidad del sonido (crescendo, decrescendo, diminuendo).



Fragmento de *Solus*, composición para trompeta
hecha en 1975 por Stanley Friedman

A pesar de esto, lo cierto es que los soportes informáticos y la tecnología basada en modelos matemáticos responden de manera muy precisa a las necesidades de los músicos. A continuación veremos cómo una de las herramientas fundamentales de la Inteligencia Artificial, la lógica borrosa (*Fuzzy Logic*), es una de las claves que permite tratar con este tipo de incertidumbre.

Introducción a la lógica borrosa

A mediados de los años sesenta, Lotfi A. Zadeh (Azerbaiyán, 1921, actualmente profesor emérito de la Universidad de California en Berkeley) introduce¹⁹ la Teoría de *Conjuntos Borrosos*, cuyo objetivo era proporcionar las bases del razonamiento aproximado utilizando premisas imprecisas como instrumento para formular el conocimiento.

La idea principal contenida en un conjunto borroso (*Fuzzy Set*), que se encuadra dentro de la Lógica Multivaluada, es que el pensamiento humano utiliza ‘etiquetas lingüísticas’ que permiten que los objetos puedan pertenecer a una clase y a otra de forma suave y flexible. En la práctica, se habla de que alguien es “alto” o “bajo” sin que por ello el interlocutor deje de tener la información necesaria (Kaufmann y Gil Aluja, 1987).

¹⁹. En realidad, el origen podría fijarse en 1922 cuando Lukasiewicz cuestionaba la lógica clásica booleana (valores cierto y falso) y proponía una lógica de valores ciertos en el intervalo unidad como generalización de su lógica trivaluada. En los años 30 fueron propuestas lógicas multivaluadas para un número cualquiera de valores ciertos (igual o mayor que 2), identificados mediante números racionales en el intervalo $[0, 1]$. Posteriormente, en 1937, Max Black (1909 - 1989), publicó el artículo “Vagueness: An exercise in Logical Analysis” y en los años 1942 y 1950, Karl Menger (1902 - 1985), publicó en “Statistical Metrics” dos artículos sobre relaciones borrosas de indistinguibilidad.

Para entender a qué nos referimos cuando hablamos de lógica borrosa, analicemos el siguiente ejemplo, extraído de *Pensamiento borroso* de B. Kosko (1995):

“Sostened una manzana en la mano. [...] Dadle un mordisco; masticad este trozo y tragáoslo.[...] El objeto que tenéis en la mano ¿es todavía la manzana? ¿Sí o no? Pegadle otro mordisco. El nuevo objeto ¿es todavía una manzana? [...] La manzana pasa de serlo a no serlo, y a ser nada. Pero ¿cuándo ha pasado la línea que separa el ser manzana de no serlo? Cuando tenéis media manzana en la mano, tenéis tanto una manzana como no la tenéis. La media manzana es una manzana borrosa, gris entre el blanco y el negro. La borrosidad es grisura.”

Aunque lo hace de forma implícita, la cuestión que se plantea en el ejemplo es que disponer de mayor información no quiere decir contar con más hechos. Con más información se describen mejor los hechos, pero no se tienen imágenes más claras sobre ellos. La incertidumbre, la borrosidad, se mantiene en los propios hechos (Gil Aluja, 1999).

En un conjunto clásico (booleano) se asigna el valor 0 ó 1 a cada elemento para indicar la pertenencia o no a dicho conjunto. Esta función, denominada función característica del conjunto, puede generalizarse de forma que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango particular (que suele ser el intervalo $[0, 1]$), y con ello indiquen el *grado de pertenencia* de los elementos al conjunto en cuestión. Estas funciones se llaman *funciones de pertenencia* y son las que estructuran los *conjuntos borrosos*.

Un grado de pertenencia nulo se interpreta como no pertenencia, el 1 como pertenencia en el sentido booleano y los números intermedios reflejan una pertenencia incierta, que será

interpretada de diversos modos según cada aplicación. Así, la manzana entera del ejemplo tendrá un grado de verdad 1 para la afirmación “ser una manzana”, mientras que la manzana de la que nos hemos comido parte puede tener grado de verdad 0.4, 0.3, etc. La potencia de esta teoría se debe a que a través de la pertenencia a un conjunto se puede describir gran número de situaciones. Para distinguirlos de los conjuntos clásicos, los conjuntos borrosos suelen expresarse mediante un tilde, es decir $\tilde{A}$ es un conjunto borroso y A es un conjunto booleano.

En el contexto que nos preocupa, si fijamos como nota patrón el *la* de 440 Hz., un sonido de 442 Hz., desde el punto de vista de la lógica booleana, estaría desafinada, no sería una nota. Sin embargo, para cualquier músico (o cualquier persona que la escuche) esta nota no tiene el mismo “grado de desafinación” que otra de 450Hz. Es decir, que el salto de afinado a desafinado el músico lo interpreta como un conjunto borroso en el que se pasa de una situación a otra de forma gradual. Lo importante es fijar cuán flexibles somos con ambos conceptos.

Antes de establecer los límites de flexibilidad, necesitamos introducir una idea más de lógica borrosa: los números borrosos. Si con la lógica borrosa todo es cuestión de grado, podría parecer que los números escapan de la “dejadez” de la borrosidad. Sin embargo, en realidad no es así. Pensemos en el número 0. El número cero pertenece al completamente al *conjunto cero* y no hay otro número que pertenezca a él. Pero, ¿qué pasa con los números cercanos al cero o que prácticamente son cero? En el mundo real, es razonable suponer que 0.001 es “casi 0” mientras que 35 no lo es. Esto nos lleva a la idea de número borroso, que no es más que un caso particular de conjunto borroso al que le exigimos ciertas condiciones sobre la función de pertenencia.

Las notas como conjuntos borrosos

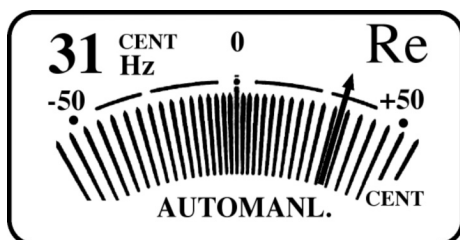
Para el oído humano, la relación entre la magnitud de un estímulo físico y la percepción no es lineal, de hecho en esto se basan muchos efectos acústicos. Se ha comprobado que en la zona central del campo de audibilidad, la sensación de altura es proporcional al logaritmo de la energía que produce la excitación, y esto se conoce como Ley de Weber-Fechner²⁰.

Los afinadores cromáticos electrónicos que utilizan los músicos, lo que hacen es medir la distancia de una nota respecto de la afinación perfecta. Estos afinadores, basados en las 12 notas del sistema temperado igual de 12 notas, dividen la octava en doce partes iguales. Cada una de estas partes tiene una amplitud de 100 cents. Si representásemos esta situación en un segmento, la nota afinada, F , ocuparía el punto medio y los extremos f_1, f_2 se obtendrían aumentando y disminuyendo 50 cents a la nota central, respectivamente.

Por ejemplo, si se ha fijado como nota patrón el $la_4=440$ Hz, cuando el afinador detecta una nota n , cuya frecuencia es 299 Hz, la respuesta que proporciona el afinador es que se trata de un re que está desafinado, en concreto 31.1702 cents más alto de lo que debería.

²⁰. La distancia de altura entre dos notas de frecuencias f_1 y f_2 hercios, se puede expresar, de manera aproximada, en cents como

$$d(f_1, f_2) = 1200 \cdot \left| \log_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right| \text{ cents}.$$

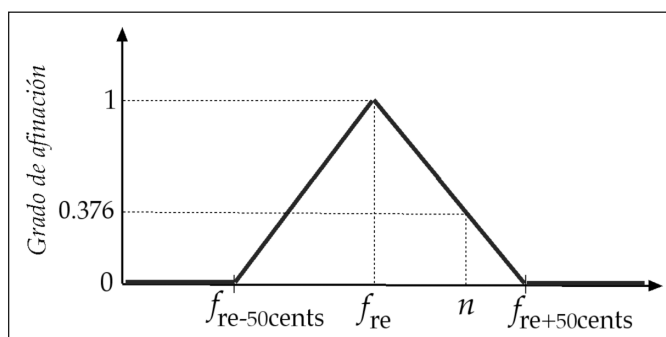


Respuesta de un afinador cromático al detectar un sonido de 299 Hz.

Para llegar a este resultado, el afinador localiza la nota afinada más próxima a n (en este caso el re) y calcula la distancia entre n y el re que resulta 31.1702 cents. Pero esta información se puede utilizar para responder a otra pregunta: ¿Cuál es el grado de verdad de la afirmación “299 Hz. es un re ”? Si la verdad absoluta tiene un grado 1, basta con calcular cuánto se desvía (en proporción) de este 1 para que tengamos la respuesta, es decir,

$$1 - \frac{\text{Desviación}}{50} = 1 - \frac{31.1702}{50} = 0.3766.$$

Entonces, lo que hemos hecho es describir el re como un conjunto borroso, por ejemplo como un triángulo, en el que la nota afinada (desde el punto de vista booleano) tiene un grado de pertenencia 1, y la tolerancia máxima que estamos dispuestos a admitir es 50 cents por encima o por debajo de la nota afinada.



Función de pertenencia del re y grado de afinación de 299 Hz.

Generalizando el razonamiento expuesto, cualquier nota musical puede describirse mediante un *número borroso*, que no tiene por qué ser triangular, ni simétrico.

Comparación de notas borrosas

Entender las notas como conjuntos borrosos supone replantear muchos conceptos tradicionales de la música que, normalmente, se generalizan de forma intuitiva. Por ejemplo, por la forma en que han sido construidas las notas borrosas, podemos aceptar que una nota está mejor afinada cuanto más lo esté la frecuencia central del triángulo. Pero es evidente que en la música, lo realmente importante no es si una nota aislada está bien afinada o no, lo fundamental es que sea correcta la relación de unas notas con otras.

Desde el punto de vista clásico, para comparar dos notas no hay más que medir la distancia (intervalo) entre ellas. En 1948, casi veinte años antes de que Zadeh introdujera los conjuntos borrosos, el musicólogo ruso N. A. Garbuzov (1880-1955) revolucionó el estudio de los intervalos musicales. En 1948, publicó el artículo “*The zonal nature of the human aural perception*” en el que hacía un estudio de la percepción de los intervalos musicales.

A pesar de que se trata de uno de los primeros intentos por valorar de forma numérica este concepto, el trabajo pasó inadvertido por estar publicado en ruso en la Academia de Ciencias de Moscú y en una época en la que muchas investigaciones hechas en la URSS no pasaban al dominio público. Debió transcurrir más de un cuarto de siglo hasta que, de la mano de Ján Haluska, los trabajos de Garbuzov empezaron a considerarse elementos clave dentro de la psicoacústica (Haluska, 2000, 2005).

La idea del mencionado artículo es que, para medir los intervalos, lo decisivo era el concepto de “zonas”²¹, en el contexto de la percepción, y no el de frecuencias puntuales como se venía haciendo. Se trató de un trabajo de laboratorio en el que a partir de miles de pruebas estableció bandas para los intervalos melódicos (las notas suenan sucesivamente) y armónicos (las notas suenan simultáneamente).

En resultado de la investigación mostró que, en la práctica, dos notas que distan entre -12 y 12 cents podemos suponer que son la misma nota (unísono) o si distan entre 372 y 430 cents, entre ambas hay un intervalo de tercera mayor; y así fue desgranando uno por uno los intervalos musicales.

En un lenguaje actual, la teoría de Garbuzov podría simplificarse mucho diciendo que los intervalos musicales se han convertido en conjuntos borrosos. Ahora queda por mostrar cómo podemos comparar las notas sin tener que recurrir a miles de experimentos. Usando los mismos términos que para hablar de la experiencia de Garbuzov, ya tenemos que cada nota es un intervalo matemático, ahora falta establecer cómo calcular el intervalo musical.

Si queremos comparar las notas, no hay más que pensar que serán más parecidas cuanto más parecidos sean los triángulos que las representan, o dicho de otro modo: “cuando haya mucha intersección entre estos triángulos las notas serán muy similares”. Por el contrario, si la intersección es pequeña o vacía las notas son diferentes. Esta idea significa que el grado de compatibilidad entre dos números borrosos $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ se calcula como la posibilidad de que estos números sean iguales, lo cuál matemáticamente se expresa como

²¹. Estas zonas se conocen en la actualidad como las zonas de Garbuzov.

$$\text{Pos}(\tilde{A} = \tilde{B}) = \sup_x \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\},$$

donde $\mu_{\tilde{A}}$ y $\mu_{\tilde{B}}$ son las funciones de pertenencia de $\tilde{A}$ y de $\tilde{B}$, respectivamente.

Sin embargo, como los números que representan a las notas son triangulares, el grado de compatibilidad entre dos notas se puede obtener calculando el punto más alto de la intersección de los triángulos. De hecho, por un cálculo directo se comprueba (Liern, 2005; León y Liern, 2013) que el grado de compatibilidad entre dos notas, se obtiene como

$$\text{Compat}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = 1 - \frac{d(f_1, f_2)}{2 \times \text{tolerancia en cents}},$$

donde f_1 y f_2 son las frecuencias centrales de las notas en hercios y d es la distancia en cents.

Como hemos dicho anteriormente, en la orquesta sinfónica conviven instrumentos que afinan en sistemas diferentes. Si, a modo de ejemplo, analizamos la compatibilidad de las notas, afinadas en los sistemas de Pitágoras, Zarlino (Justa Entonación) y Temperado, del fragmento de *Música para cuerdas, percusión y celesta* de Béla Bartók, que aparece a continuación,



Tres compases de *Música para cuerdas, percusión y celesta*
de Béla Bartók (1881 – 1945).

basta con calcular la compatibilidad, usando la fórmula que acabamos de mostrar. Rápidamente se comprueba que algunas de estas notas son muy poco compatibles. Así, si para aceptar que dos notas puedan sonar juntas exigimos un mínimo de un 50% de compatibilidad (un grado de verdad de 0.5), podemos

comprobar que muchas de las notas de este fragmento no deberían sonar simultáneamente emitidas por instrumentos que afinan en los tres sistemas de afinación mencionados, puesto que el grado de compatibilidad es bajo. Sin embargo, como bien sabemos, esta disonancia era uno de los efectos que perseguía Béla Bartók con su obra.

Consonancias de notas borrosas

A estas alturas del discurso, ya sabemos que decidir cuán consonante es un intervalo resulta sencillo cuando se trata del unísono, la octava, la cuarta, la quinta o incluso la tercera, pero la cuestión se complica con otros intervalos. Y aún se hace más difícil establecer criterios objetivos para ordenar la consonancia de los acordes. La idea que subyace a este grado creciente de dificultad es que no se trata de una simple ordenación de números, sino que las ordenaciones responden a criterios de preferencia y no sólo a los valores de los números reales. Cuando a esta dificultad se le añade que las magnitudes susceptibles de ser ordenadas no son números, sino conjuntos borrosos, el reto aún es más estimulante.

Desde su inicio, establecer relaciones de orden en familias de conjuntos borrosos, ha sido una línea de investigación muy fructífera, sobre todo en la última década. Para el caso que nos ocupa, ordenar las consonancias, siempre podríamos recurrir a aceptar el orden clásico que se obtendría al elegir una frecuencia (por ejemplo la media o la moda) como representante de cada nota borrosa. Sin embargo, esto parece desaprovechar el tratamiento conjuntista de las notas, y de hecho esta es una de las líneas de investigación que se están desarrollando en la actualidad.



❧ 8. REFLEXIONES FINALES

En ocasiones, para entender la escultura o la arquitectura es necesario analizar los cuerpos geométricos que se esconden en la obra. En música ocurre algo similar, para comprender una composición es útil reconocer los patrones musicales que contiene. Sin embargo, no me gustaría dejar la falsa impresión de que las Matemáticas pueden sustituir al artista, en este caso el músico. Hay que pensar que, por fortuna, la interpretación humana está tan llena de matices y rasgos expresivos, que para recogerlos sería necesario almacenar tal cantidad de información, y de forma tan dinámica, que excedería con mucho la memoria que podemos manejar. En este sentido, la Ciencia debe verse como una aliada del Arte y viceversa y no como cosas contrapuestas.

Pensar en unas esferas universales que giran, producen sonidos armoniosos y que encima somos capaces de interpretarlos, ha servido para motivar que la imaginación de grandísimos pensadores hiciesen avanzar tanto las Matemáticas como la Música. El propio Kepler ya sabía que esto no podía ser así, que su *Música de los Planetas* no podía oírse, pero esto no hizo que abandonaran la idea, porque simbolizaba a la perfección su búsqueda de la armonía, entendida no sólo como música. Bach también era consciente de que su *Clave Bien Temperado* era un “truco práctico” para los intérpretes, pero esto no evitó que, a la vez, fuese una revolución que ya no tenía vuelta atrás: la belleza de una aproximación formaba parte de la esencia de la obra.

Realmente, que haya cuestiones matemático-musicales que hayan permanecido sin resolver, no ha supuesto ningún problema práctico, de hecho ha animado a varios compositores del siglo XX a hacer intervenir los números y cuestiones numéricas en muchas de sus obras.

Uno de los actuales temas de investigación entre los estudiosos de la Música y la Computación es encontrar patrones musicales para reconstruirlos, para poder establecer la relación con la preferencia de un oyente dado o para diseñar relaciones entre diferentes estilos. Esto aumenta las posibilidades creativas, pero tampoco hay que olvidar que, desde el punto de vista comercial, en la venta de música por Internet, el envío de publicidad musical personalizada siguiendo los gustos musicales del comprador, etc., poder determinar patrones de los gustos musicales es muy interesante.

Por otro lado, desde un punto de vista estrictamente práctico, gracias a la cuantificación de muchos procesos musicales, los técnicos pueden ahorrar muchos esfuerzos para conseguir resultados que antes habrían supuesto muchas horas de trabajo. Y al permitir modificaciones mucho más rápidas, cada vez hace más fácil adaptar la afinación de los instrumentos a la sala y las condiciones de temperatura, humedad, etc. en las que va a tener lugar la audición.

Actualmente, tanto la lógica borrosa como otras herramientas de la Inteligencia Artificial y de las Matemáticas, brindan oportunidades muy interesantes a los artistas en general y a los músicos en particular. Aquí sólo hemos presentado una pequeña muestra de cómo se abordan en nuestros días algunos de los problemas que los músicos tienen que resolver en su práctica cotidiana, pero, evidentemente, existen muchos investigadores que trabajan en estos aspectos.

Conjugar el uso de conceptos que surgieron hace varios siglos, junto con tecnologías que cada día avanzan más rápido, hace que el músico, y por supuesto el matemático, deba dar respuesta a inconvenientes que surgen de esta combinación. Por ejemplo, la utilización tan extendida de afinadores electrónicos surgidos

hace varias décadas, debería complementarse con el uso de programas informáticos, muchos de ellos de libre disposición en Internet, que permiten que el músico sepa hasta qué punto lo que está ejecutando es compatible con otros instrumentos.

En mi opinión, estos avances, no sólo permitirán elegir otras posiciones en las digitaciones o modificar la presión en la emisión, etc., aumentando la consonancia sonora de la agrupación, sino que contribuirán a aumentar la calidad y la belleza de la Música en conjunto y, al fin y al cabo, de esto es de lo que estamos tratando.

Señoras y señores, muchas gracias por su atención.



❧ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, C. (2010): *La secta de los números. El teorema de Pitágoras*, RBA Coleccionables, S. A., Barcelona.
- Benson, D. (2006): *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Caspar, M. (2003): *Johannes Kepler*, Acento Editorial, Madrid.
- Dreyer, J. L. E. (1953): *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover Publications, Inc., Nueva York.
- Euler, L. (1990): *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía*, Ed. Univ. Zaragoza, Zaragoza.
- Euler, L. (1766a): Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique, *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 20, pp. 165 – 173.
- Euler, L. (1766b): Du véritable caractère de la musique moderne, *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 20, pp. 174 – 199.
- Gil Aluja, J. (1999): *Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre*. Ed. Milladoiro, Vigo.
- Godwin, J. (2009): *Armonía de las esferas*, Ediciones Atalanta, S. L., Girona.
- Haluska, J. (2005): *The Mathematical Theory of Tone Systems*, Marcel Dekker, Inc., Bratislava.
- Haluska, J. (2000): Equal temperament and pythagorean tuning: a geometrical interpretation in the plane, *Fuzzy Sets Systems* 114, pp. 261 – 269.

- Ibáñez Barrachina, J. (2008): *Métodos exactos y heurísticos de afinación. Aplicación a la trompeta*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia.
- Kaufmann, A., Gil Aluja, J. (1987): *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Ed. Hispano Europea. Barcelona.
- Kosko, B. (1995): *Pensamiento borroso*, Ed. Crítica, Barcelona.
- León, T., Liern, V. (2013): A fuzzy framework to explain musical tuning in practice, *Fuzzy Sets and Systems* 214, pp. 51 – 64.
- León, T., Liern, V. (2012): Mathematics and soft computing in music, *Studies in Fuzziness and Soft Computing* 273, pp. 451 – 465.
- León, T., Liern, V. (2010): Obtaining the compatibility between musicians using soft computing, *Communications in Computer and Information Science* 81 (2), pp. 75 – 84.
- Liern, V. (2012): Euler y su interés por la música, *SUMA* 70, pp. 93 – 98.
- Liern, V. (2011): ¿Qué ha sido de la música de las esferas?, *SUMA* 67, pp. 111 – 118.
- Liern, V. (2009): Las matemáticas de Johann Sebastian Bach, *SUMA* 61, pp. 113 – 118.
- Liern, V. (2008): La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida, *SUMA* 58, pp. 137 – 143.
- Liern, V. (2005): Fuzzy tuning systems: The mathematics of musicians, *Fuzzy Sets and Systems* 150 (1) , pp. 35 – 52.

Madore, J. (1992): Fuzzy Sphere, *Classical and Quantum Gravity*, 9, pp. 69 – 88.

Neubauer, J. (1992): *La emancipación de la música*, Editorial Visor, Madrid.

Robertson, A., Stevens, D. (1989): *Historia general de la música*, Ediciones Istmo, Madrid.

Vera, F. (1937): *Historia de la Ciencia*. Editorial Iberia, Barcelona.



Discurs de contestació

Excma. Sra. Dra. Pilar Bayer i Isant

Excel·lentíssim Senyor President,
Excel·lentíssims acadèmics i excel·lentíssimes acadèmiques,
Autoritats,
Distingit públic,

L'Acadèmia de Doctors es complau avui a rebre el Doctor Vicente Liern Carrión com a nou acadèmic numerari. Personalment, agraeixo al nostre president, el Doctor Alfredo Rocafort, que hagi delegat en mi l'honor de donar-li la benvinguda. Parlar públicament de matemàtiques sense pissarra ni guix és sempre un repte per a qui ho intenta, però la temàtica que ha escollit el Doctor Liern en aquesta ocasió és tan enginyosa i insòlita que, ho he de reconèixer, ha convertit en un al·licient per a mi la tasca acadèmica de compondre el contrapunt preceptiu al seu brillant discurs d'ingrés.

Llicenciat en Matemàtiques i doctor en Física Teòrica, el Doctor Liern és en l'actualitat catedràtic d'Economia Financera i Comptabilitat de la Universitat de València. La seva carrera investigadora s'inicià com a matemàtic i físic en els camps de la geometria diferencial i de la teoria de la relativitat, amb l'estudi d'estructures simplèctiques i sistemes dinàmics en espais fibrats. A tall d'exemple, esmentaré un treball seu de l'any 2000, conjunt amb J. M. Moreno i J. Olivert, en què, per mitjà del concepte de *grup dinàmic que opera en un fibrat*, estengueren el teorema d'Emmy Noether sobre lleis conservatives a fibrats principals amb grups de simetria més enllà del grup de Poincaré.

El seu àmbit d'especialització ben aviat s'adreçà vers l'optimització matemàtica en el context de models amb incertesa, amb aplicacions a l'estudi d'economies de localització, gestió de carteres de valors i gestió de recursos humans, entre d'altres. En aquests camps, cal dir que la seva acurada producció i el seu

mestratge, palesos en la direcció de diversos projectes de recerca i de nombrosos treballs especialitzats, són ben coneguts i valorats.

A les facetes de matemàtic i de físic del recipiendari voldria afegir la de musicòleg. Sorprèn gratament comprovar, a través de publicacions seves recents, l'existència de fórmules matemàtiques que mesuren el grau de compatibilitat entre notes executades per instruments musicals afinats segons temperaments diferents, però presents en formacions orquestrals.

El professor Liern és un matemàtic vinculat a la divulgació científica que també s'ha preocupat per la docència de les matemàtiques. Ha coordinat, des de l'inici, la secció «Musymáticas» de la coneguda revista de divulgació *Suma*. A més, fent honor a la terra de la qual procedeix —que aplega el nombre més gran de bandes musicals i d'instrumentistes de vent de tota la Península Ibèrica—, Liern ha exercit durant més de vint anys com a trombonista de la Banda de Paterna.

Gràcies a la dissertació que acabem d'escoltar, la música, percebuda sovint com la més majoritària de totes les arts, i la matemàtica, percebuda sovint com la més minoritària de totes les ciències, se'ns han manifestat avui fora del seu context habitual. En la nostra funció de públic, no hem vingut ni per gaudir de les sensacions que desperta en nosaltres l'audició d'una obra musical, ni per complaure'ns en una exposició científica d'aquelles que acaparen tota la nostra atenció. De manera singular, l'objectiu de la trobada ha esdevingut una reflexió sobre els orígens, l'evolució i alguns dels nexes comuns entre la matemàtica i la música, com a ciència i art mil·lenaris.

Tal com hem vist, la música i les matemàtiques són llenguatges humans susceptibles d'influenciar-se mútuament. En determi-

nades èpoques, la música s'ha avançat a les matemàtiques i, en d'altres, ha estat justament a l'inrevés. En totes dues disciplines, però, les seves fites són reproduïbles i perduren.

La música s'adreça des de l'intel·lecte a l'àmbit de les emocions. La matemàtica promou el treball de l'intel·lecte a partir del sentiment que hi desvetlla la contemplació de la natura. El concepte d'*harmonia de les esferes*, el fil conductor del treball de Liern d'avui, proporciona un bon exemple d'aquesta manera de procedir: els antics, captivats per les relacions numèriques que descobrien en la gènesi dels sons plaents a l'oïda i, al mateix temps, exposats durant llargues nits d'estiu a la contemplació dels intrigants moviments dels astres, optaren per concloure que, ambdós fets, havien d'obeir a lleis quantificables i, per tant, intel·ligibles. Després d'un camí de segles, el mètode científic els donaria la raó en aquesta concepció racional, però en corregiria a bastament els resultats numèrics, deficitaris per força, atesa la precarietat dels mitjans experimentals emprats en la seva obtenció.

Les proporcions pitagòriques sobre els radis de les esferes celestes, el fantàstic relat de Plató en el *Timeu* sobre la creació de l'«ànima del món», o les afirmacions de Ciceró en el *Somni d'Escipió* relatives al destí final de certs humans són magnífics exemples d'abstracció portats a terme per la ment humana en el seu desig insaciable de comprendre –i de salvar-se.

La creació de la notació musical en conjunció amb la notació matemàtica mereixeria per ella mateixa un estudi més detallat. Tal com hem sentit, la consideració de les proporcions i l'algorisme d'Euclides per al càlcul del màxim comú divisor estigueren lligats a la fixació de les notes musicals i a la conformació de les consonàncies; la unitat de la descomposició dels enters en producte de primers i la irracionalitat de les arrels quadra-

da i cúbica de 2 –i, per tant, de l'arrel dotzena–, incidiren en la presència inexorable de la *coma pitagòrica* i en l'acceptació gradual del sistema temperat; el fet que el producte de freqüències es correspongui amb l'addició d'interval·ls remet de manera natural al concepte de logaritme i, així mateix, els cercles de quintes ens podrien conduir cap als problemes de les construccions amb regla i compàs i la consideració dels grups cíclics de transformacions.

El doctor Liern ens ha posat també de manifest que l'evolució de la notació neumàtica del cant gregorià pogué incidir segurament en l'adopció dels eixos de coordenades –per part de Descartes– i en la posterior representació gràfica de les funcions matemàtiques d'una variable, eines totes elles imprescindibles per al desenvolupament del càlcul a partir de Newton, Leibniz i Fourier. També, probablement, sense els dubtes de Kepler a l'hora de voler quadrar les afirmacions del *Timeu* i de *La república* de Plató amb les observacions astronòmiques de Tycho Brahe, la poma de Newton hauria tardat força més a madurar i caure de l'arbre.

Tot seguit, em permetré afegir algunes consideracions sobre la popularització experimentada per la música i les matemàtiques, basades en principis comuns a totes dues. Fins a la primera meitat del segle XX, la música culta occidental, ja fos simfònica o de cambra, era a l'abast de ben poques persones: la reialesa, la noblesa, el clergat i molt poques més. Podem afegir que les obres musicals, ja fossin laiques o religioses, s'interpretaven en comptades ocasions (quantes vegades els compositors clàssics o els romàntics tenien l'oportunitat de sentir les seves pròpies creacions, especialment si requerien un conjunt nombrós d'intèrprets?). La resta de la població continuava tenint l'accés musical restringit al repertori popular. Ací les regles podien ser inexistents: sense cadències ni partitures ni, fins i tot, el con-

cepte d'obra. També, en cultures diferents de la nostra, l'evolució musical ha pogut ser tota una altra; no només a l'Àfrica, sinó en general a les cultures asiàtiques –de l'Índia, la Xina, el Japó, els països àrabs, etc.– la música i la seva dimensió social sovint han tingut un significat totalment diferent.

Però, un bon dia, les reflexions teòriques sobre la música i les matemàtiques, com les que hem sentit en el discurs, començaren a donar fruits. Iniciades per l'escola pitagòrica i continuades per Boeci, Guido d'Arezzo i Francisco de Salinas (a l'Edat Mitjana); Zarlino, Vincenzo Galilei, Mersenne i Descartes (al Renaixement); així com per Euler i D'Alembert (al Segle de les Llums), entre d'altres, aquelles reflexions derivaren en la creació d'un corpus teòric acústic musical que es fixà a partir del segle XVIII.

L'estudi del so des d'un punt de vista físic matemàtic féu possible, per exemple, la descoberta dels harmònics, i també la comprensió i posterior reproducció del timbre dels instruments i de la veu humana. Aquestes fites se situen en el punt de partida d'uns coneixements científics i tècnics que han permès apropar la música i les matemàtiques a tota la població. En el decurs de poc més de dos segles i mig, la humil equació d'ona de D'Alembert (de 1747) ha derivat en el desenvolupament de l'anàlisi harmònica i en l'omnipresència de l'operador de Laplace i de les seves innombrables aplicacions, amb tots els canvis tecnològics inherents.

La música de la noblesa o la que s'improvisava als camps de cotó han acabat fent-se un espai en totes les esferes socials. Dels Stradivarius a les Stratocaster, de Wanda Landowska a Tina Turner; o des de les primeres gravacions en discos de pedra als darrers sistemes d'enregistrament ha plogut una mica. L'amplificació del so permet avui oferir audicions musicals en espais

oberts que apleguen centenars de milers de persones. Alhora, la ingent producció de CD-s i la millora dels equips domèstics d'alta fidelitat permeten escoltar en qualsevol llar i en condicions acústiques d'excepció la música de qualsevol època —des de la medieval o la barroca fins a la contemporània més avantguardista.

Al mateix temps, l'automatització del càlcul per via de la computació electrònica ens permet fer servir els algoritmes més sofisticats sense que gairebé ni ens n'adonem. Velocitats de càlcul de l'ordre dels mil teraflops per segon —és a dir, de 10^{15} operacions de coma flotant per segon— ens permeten avançar en la gestió de bases de dades ingents —conegudes amb el nom de *Big Data*—, com ara les pròpies de la meteorologia, l'economia, la biologia molecular o la cosmologia. Per no parlar de la futura computació quàntica, però això ja tindrem temps de fer-ho més endavant, amb l'ajut del Doctor Liern.

Com d'habitud, però, ser més lúcids implica pagar un preu: allí on Plató col·locava esferes giratòries i sirenes que cantaven en arrossegar els estels en el seu moviment, els científics d'avui detecten la radiació de fons de microones, que és imperceptible per a l'oïda; o bé capten oscil·lacions acústiques de barions que provenen de l'univers primigeni i que permeten estimar-ne el seu ritme d'expansió; l'«ànima del món», ens diuen, estaria formada per energia fosca i forats negres —capaços d'engolir totes les nostres esperances i totes les nostres il·lusions. Els científics d'avui —com els pitagòrics d'ahir— continuen oferint-nos interpretacions (potser mítiques) a partir de càlculs complexos. Així, el nostre futur podria dependre encara d'una densitat crítica que, segons com, ens conduiria de la *Gran explosió* a la *Gran implosió* (és a dir, del *Big Bang* al *Big Crunch*) o bé, si ho preferiu, de l'Alfa a l'Omega, en la simfonia més llarga mai interpretada.

Per acabar, felicito el Doctor Liern, la seva família i el personal del Departament de Matemàtiques per a l'Economia i l'Empresa de la Universitat de València i desitjo que la seva incorporació a aquesta Acadèmia ens permeti continuar gaudint de la seva amistat, de la seva experiència, de la seva inquietud intel·lectual i dels seus coneixements.

Moltes gràcies per la vostra atenció.



PUBLICACIONES DE LA REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

Directori 1991

Los tejidos tradicionales en las poblaciones pirenaicas (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Eduardo de Aysa Satué, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Josep A. Plana i Castellví, Doctor en Geografia i Història) 1992.

La tradición jurídica catalana (Conferència magistral de l'acadèmic de número Excm. Sr. Josep Joan Pintó i Ruiz, Doctor en Dret, en la Solemne Sessió d'Apertura de Curs 1992-1993, que fou presidida per SS.MM. el Rei Joan Carles I i la Reina Sofia) 1992.

La identidad étnica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Pou d'Avilés, Doctor en Dret) 1993.

Els laboratoris d'assaig i el mercat interior; Importància i nova concepció (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Simón i Tor, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1993.

Contribución al estudio de las Bacteriemias (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent II·lm. Sr. Miquel Marí i Tur, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm. Sr. Manuel Subirana i Cantarell, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1993.

Realitat i futur del tractament de la hipertròfia benigna de pròstata (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia i contestació per l'Excm. Sr. Albert Casellas i Condom, Doctor en Medicina i Cirurgia i President del Col·legi de Metges de Girona) 1994.

La seguridad jurídica en nuestro tiempo. ¿Mito o realidad? (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1994.

La transició demogràfica a Catalunya i a Balears (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ferrer i Bernard, Doctor en Psicologia) 1994.

L'art d'ensenyar i d'aprendre (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Agustín Luna Serrano, Doctor en Dret) 1995.

Sessió necrològica en record de l'Excm. Sr. Lluís Dolcet i Boxeres, Doctor en Medicina i Cirurgia i Degà-emèrit de la Reial Acadèmia de Doctors, que morí el 21 de gener de 1994. Enaltiren la seva personalitat els acadèmics de número Excms. Srs. Drs. Ricard Garcia i Vallès, Josep Ma. Simón i Tor i Albert Casellas i Condom. 1995.

La Unió Europea com a creació del geni polític d'Europa (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Jordi Garcia-Petit i Pàmies, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques) 1995.

La explosión innovadora de los mercados financieros (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il·lm. Sr. Emilio Soldevilla García, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm. Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret) 1995.

La cultura com a part integrant de l'Olimpisme (Discurs d'ingrés com a acadèmic d'Honor de l'Excm. Sr. Joan Antoni Samaranch i Torelló, Marquès de Samaranch, i contestació per l'Excm. Sr. Jaume Gil Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques) 1995.

Medicina i Tecnologia en el context històric (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán) 1995.

Els sòlids platònics (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Pilar Bayer i Isant, Doctora en Matemàtiques, i contestació per l'Excm. Sr. Ricard Garcia i Vallès, Doctor en Dret) 1996.

La normalització en Bioquímica Clínica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Xavier Fuentes i Arderiu, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm. Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Geografia) 1996.

L'entropia en dos finals de segle (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques, i contestació per l'Excm. Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques) 1996.

Vida i música (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Carles Ballús i Pascual, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Espadaler i Medina, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1996.

La diferencia entre los pueblos (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il·lm. Sr. Sebastià Trías Mercant, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

L'aventura del pensament teològic (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia, i contestació per l'Excm. Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 1996.

El derecho del siglo XXI (Discurs d'ingrés com a acadèmic d'Honor de l'Excm. Sr. Dr. Rafael Caldera, President de Venezuela, i contestació per l'Excm. Sr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

L'ordre dels sistemes desordenats (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm. Sr. Joan Bassegoda i Novell, Doctor en Arquitectura) 1997.

Un clam per a l'ocupació (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Isidre Fainé i Casas, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Joan Bassegoda i Nonell, Doctor en Arquitectura) 1997.

Rosalía de Castro y Jacinto Verdaguer, visión comparada (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Jaime M. de Castro Fernández, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

La nueva estrategia internacional para el desarrollo (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Santiago Ripol i Carulla, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

El aura de los números (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins,

Canals i Ports, i contestació per l'Excm. Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 1998.

Nova recerca en Ciències de la Salut a Catalunya (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Anna Maria Carmona i Cornet, Doctora en Farmàcia, i contestació per l'Excm. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 1999.

Dilemes dinàmics en l'àmbit social (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Albert Biayna i Mulet, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 1999.

Mercats i competència: efectes de liberalització i la desregulació sobre l'eficàcia econòmica i el benestar (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Amadeu Petitbó i Juan, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm. Sr. Jaime M. de Castro Fernández, Doctor en Dret) 1999.

Epidemias de asma en Barcelona por inhalación de polvo de soja (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Ma. José Rodrigo Anoro, Doctora en Medicina, i contestació per l'Excm. Sr. Josep Llorc i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques) 1999.

Hacia una evaluación de la actividad cotidiana y su contexto: ¿Presente o futuro para la metodología? (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Maria Teresa Anguera Argilaga, Doctora en Filosofia i Lletres (Psicologia) i contestació per l'Excm. Sr. Josep A. Plana i Castellví, Doctor en Geografia i Història) 1999.

Directorio 2000

Génesis de una teoría de la incertidumbre. Acte d'imposició de la Gran Creu de l'Orde d'Alfons X el Savi a l'Excm. Sr. Dr. Jaume Gil-Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Financeres) 2000.

Antonio de Capmany: el primer historiador moderno del Derecho Mercantil (discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Xabier Añoberos Trías de Bes, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Santiago Dexeus i Trías de Bes, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2000.

La medicina de la calidad de vida (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Luís Rojas Marcos, Doctor en Psicologia, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Ángel Aguirre Baztán, Doctor en psicologia) 2000.

Pour une science touristique: la tourismologie (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il·lm. Sr. Dr. Jean-Michel Hoerner, Doctor en Lletres i President de la Universitat de Perpinyà, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Jaume Gil-Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques) 2000.

Virus, virus entèrics, virus de l'hepatitis A (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Albert Bosch i Navarro, Doctor en Ciències Biològiques, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària) 2000.

Mobilitat urbana, medi ambient i automòbil. Un desafiament tecnològic permanent (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Pere de Esteban Altirriba, Doctor en Enginyeria Industrial, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Carlos Dante Heredia García, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2001.

El rei, el burgès i el cronista: una història barcelonina del segle XIII (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. José Enrique Ruiz-Domènec, Doctor en Història, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2001.

La informació, un concepte clau per a la ciència contemporània (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Salvador Alsius i Clavera, Doctor en Ciències de la Informació, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports) 2001.

La drogaaddicció com a procés psicobiològic (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Miquel Sánchez-Turet, Doctor en Ciències Biològiques, i contestació per l'Excm. Sr. Pedro de Esteban Altirriba, Doctor en Enginyeria Industrial) 2001.

Un univers turbulent (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jordi Isern i Vilaboy, Doctor en Física, i contestació per l'Excm. Sra. Dra. Maria Teresa Anguera Argilaga, Doctora en Psicologia) 2002.

L'envelliment del cervell humà (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm. Sr. Dr. Jordi Cervós i Navarro, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep Ma. Pou d'Avilés, Doctor en Dret) 2002.

Les telecomunicacions en la societat de la informació (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Àngel Cardama Aznar, Doctor en Enginyeria de Telecomunicacions, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports) 2002.

La veritat matemàtica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera, doctor en Matemàtiques, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 2003.

L'humanisme essencial de l'arquitectura moderna (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Helio Piñón i Pallarés, Doctor en Arquitectura, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Xabier Añoveros Trías de Bes, Doctor en Dret) 2003.

De l'economia política a l'economia constitucional (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Joan Francesc Corona i Ramon, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Xavier Iglesias i Guiu, Doctor en Medicina) 2003.

Temperància i empatia, factors de pau (Conferència dictada en el curs del cicle de la Cultura de la Pau per el Molt Honorable Senyor Jordi Pujol, President de la Generalitat de Catalunya, 2001) 2003.

Reflexions sobre resistència bacteriana als antibiòtics (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Dra. Ma. de los Angeles Calvo i Torras, Doctora en Farmàcia i Veterinària, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària) 2003.

La transformación del negocio jurídico como consecuencia de las nuevas tecnologías de la información (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Rafael Mateu de Ros, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Jaime Manuel de Castro Fernández, Doctor en Dret) 2004.

La gestión estratégica del inmovilizado (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma. Sra. Dra. Anna Maria Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep J. Pintó i Ruiz, Doctor en Dret) 2004.

Los costes biológicos, sociales y económicos del envejecimiento cerebral (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Félix F. Cruz-Sánchez, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera, Doctor en Matemàtiques) 2004.

El conocimiento glaciar de Sierra Nevada. De la descripción ilustrada del siglo XVIII a la explicación científica actual. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Antonio Gómez Ortiz, Doctor en Geografia, i contestació per l'acadèmica de número Excma. Sra. Dra. Maria Teresa Anguera Argilaga, Doctora en Filosofia i Lletres (Psicologia))2004.

Los beneficios de la consolidación fiscal: una comparativa internacional (Discurs de recepció com a acadèmic d'Honor de l'Excm. Sr. Dr. Rodrigo de Rato y Figaredo, Director-Gerent del Fons Monetari Internacional. El seu padrí d'investidura és l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaime Manuel de Castro Fernández, Doctor en Dret) 2004.

Evolución histórica del trabajo de la mujer hasta nuestros días (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Eduardo Alemany Zaragoza, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Rafel Orozco i Delclós, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2004.

Geotecnia: una ciencia para el comportamiento del terreno (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Antonio Gens Solé, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports) 2005.

Sessió acadèmica a Perpinyà, on actuen com a ponents; Excma. Sra. Dra. Anna Maria Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials i Excm. Sr. Dr. Jaume Gil-Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials: “Nouvelles perspectives de la recherche scientifique en économie et gestion”; Excm. Sr. Dr. Rafel Orozco i Delcós, Doctor en Medicina i Cirurgia: “L'impacte mèdic i social de les cèl·lules mare”; Excma. Sra. Dra. Anna Maria Carmona i Cornet, Doctora en Farmàcia: “Nouvelles stratégies oncologiques”; Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària: “Les résistences bactériennes a les antibiotiques”. 2005.

Los procesos de concentración empresarial en un mercado globalizado y la consideración del individuo (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Fernando Casado Juan, Doctor en Ciències Econòmiques

i Empresariales, i contestació de l'Excm. Sr. Dr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 2005.

"Son nou de flors els rams li renc" (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jaume Vallcorba Plana, Doctor en Filosofia i Lletres (Secció Filologia Hispànica), i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Enrique Ruíz-Domènec, Doctor en Filosofia i Lletres) 2005.

Historia de la anestesia quirúrgica y aportación española más relevante (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Vicente A. Gancedo Rodríguez, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariales) 2006.

El amor y el desamor en las parejas de hoy (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Paulino Castells Cuixart, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Joan Trayter i Garcia, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariales) 2006.

El fenomen mundial de la deslocalització com a instrument de reestructuració empresarial (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort i Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariales, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Isidre Fainé i Casas, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariales) 2006.

Biomaterials per a dispositius implantables en l'organisme. Punt de trobada en la Historia de la Medicina i Cirurgia i de la Tecnologia dels Materials (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Anton Planell i Estany, Doctor en Ciències Físiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària) 2006.

La ciència a l'Enginyeria: El llegat de l'école polytechnique. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Xavier Oliver i Olivella, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Pla i Carrera, Doctor en Matemàtiques) 2006.

El voluntariat: Un model de mecenatge pel segle XXI. (Discurs d'ingrés de l'acadèmica de número Excma. Sra. Dra. Rosamarie Cammany Dorr, Doctora en Sociologia de la Salut, i contestació per l'Excma. Sra. Dra. Anna Maria Carmona i Cornet, Doctora en Farmàcia) 2007.

El factor religioso en el proceso de adhesión de Turquía a la Unión Europea. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Maria Ferré i Martí, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Carlos Dante Heredia García, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2007.

Coneixement i ètica: reflexions sobre filosofia i progrés de la propedèutica mèdica. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Màrius Petit i Guinovart, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia) 2007.

Problemática de la familia ante el mundo actual. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic honorari Excm. Sr. Dr. Gustavo José Noboa Bejarano, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Paulino Castells Cuixart, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2007.

Alzheimer: Una aproximació als diferents aspectes de la malaltia. (Discurs d'ingrés de l'acadèmica honoraria Excma. Sra. Dra. Nuria Durany Pich, Doctora en Biologia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate, Doctor-Enginyer de Camins, Canals i Ports) 2008.

Guillem de Guimerà, Frare de l'hospital, President de la Generalitat i gran Prior de Catalunya. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic honorari Excm. Sr. Dr. Josep Maria Sans Travé, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. D. José E. Ruiz Domènec, Doctor en Filosofia Medieval) 2008.

La empresa y el empresario en la historia del pensamiento económico. Hacia un nuevo paradigma en los mercados globalizados del siglo XXI. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Guillermo Sánchez Vilariño, Doctor Ciències Econòmiques i Financeres, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaume Gil Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Financeres) 2008.

Incertesa i bioenginyeria (Sessió Acadèmica dels acadèmics corresponents Excm. Sr. Dr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia amb els ponents Excm. Sr. Dr. Joan Anton Planell Estany, Doctor en Ciències Físiques, Excma. Sra. Dra. Anna M. Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Financeres i Il·lm. Sr. Dr. Humberto Villavicencio Mavrich, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2008.

Els Ponts: Història i repte a l'enginyeria estructural (Sessió Acadèmica dels acadèmics numeraris Excm. Sr. Dr. Xavier Oliver Olivella, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, i Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports, amb els Ponents Il·lm. Sr. Dr. Angel C. Aparicio Bengoechea, Professor i Catedràtic de Ponts de l'escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona, Il·lm. Sr. Dr. Ekkehard Ramm, Professor, institute Baustatik) 2008.

Marketing político y sus resultados (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Francisco Javier Maqueda Lafuente, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials i contestació per l'acadèmica de número Excm. Sra. Dra. Anna M. Gil Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Financeres) 2008.

Modelo de predicción de "Enfermedades" de las Empresas a través de relaciones Fuzzy (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Antoni Terceño Gómez, Doctor en Ciències Econòmiques i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Paulino Castells Cuixart, Doctor en Medicina) 2009.

Células Madre y Medicina Regenerativa (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Juan Carlos Izpisúa Belmonte, Doctor en Farmàcia i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina) 2009.

Financiación del déficit externo y ajustes macroeconómicos durante la crisis financiera El caso de Rumania (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Mugur Isarescu, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2009.

El legado de Jean Monnet (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excm. Sra. Dra. Teresa Freixas Sanjuán, Doctora en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Fernando Casado Juan, Doctor en Ciències Econòmiques) 2010.

La economía china: Un reto para Europa (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jose Daniel Barquero Cabrero, Doctor en Ciències Humanes, Socials i Jurídiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2010.

Les radiacions ionitzants i la vida (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Albert Biete i Solà, Doctor en Medicina, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 2010.

Gestió del control intern de riscos en l'empresa postmoderna: àmbits econòmic i jurídic (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Ramon Poch i Torres, Doctor en Dret i Ciències Econòmiques i Empresariales, i contestació per l'acadèmica de número Excma. Sra. Dra. Anna Maria Gil i Lafuente, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresariales) 2010.

Tópicos típicos y expectativas mundanas de la enfermedad del Alzheimer (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Rafael Blesa, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Llorc i Brull, Doctor en Ciències econòmiques i Dret) 2010.

Los Estados Unidos y la hegemonía mundial: ¿Declive o reinvencción? (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Excm. Sr. Dr. Mario Barquero i Cabrero, Doctor en Economia i Empresa, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Alfredo Rocafort i Nicolau, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresariales) 2010.

El derecho del Trabajo encrucijada entre los derechos de los trabajadores y el derecho a la libre empresa y la responsabilidad social corporativa (Discurs d'ingrés de l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Luis Salido Banús, Doctor en Dret, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Manuel Subirana Canterell) 2011.

Una esperanza para la recuperación económica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Jaume Gil i Lafuente, Doctor en Econòmiques, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia) 2011.

Certes i incertes en el diagnòstic del càncer cutani: de la biologia molecular al diagnòstic no invasiu (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Josep Malveyh, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Josep Llorc, Doctor en Econòmiques i Dret) 2011.

Una mejor universidad para una economía más responsable (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Senén Barro Ameneiro, Doctor en

Ciències de la Computació i Intel·ligència, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaume Gil i Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2012.

La transformació del món després de la crisi. Una anàlisi polièdrica i transversal (Sessió inaugural del Curs Acadèmic 2012-2013 on participen com a ponents: l'Excm. Sr. Dr. José Juan Pintó Ruiz, Doctor en Dret: “*El Derecho como amortiguador de la inequidad en los cambios y en la Economía como impulso rehumanizador*”, Excma. Sra. Dra. Rosmarie Cammany Dorr, Doctora en Sociologia de la Salut: “*Salut: mitjà o finalitat?*”, Excm. Sr. Dr. Àngel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres: “*Globalización Económico-Cultural y Repliegue Identitario*”, Excm. Sr. Dr. Jaime Gil Aluja, Doctor en Econòmiques: “*La ciencia ante el desafío de un futuro progreso social sostenible*” i Excm. Sr. Dr. Eugenio Oñate Ibañez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports: “*El reto de la transferencia de los resultados de la investigación a la industria*”), publicació en format digital www.reialacademiadoctors.cat, 2012.

La quantificació del risc: avantatges i limitacions de les assegurances (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numeraria Excma. Sra. Dra. Montserrat Guillén i Estany, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'acadèmica de número Excma. Sra. Dra. M. Teresa Anguera i Argilaga, Doctora en Filosofia i Lletres-Psicologia) 2013.

El procés de la visió: de la llum a la consciència (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Rafael Ignasi Barraquer i Compte, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Daniel Barquero Cabrero, Doctor en Ciències Humanes, Socials i Jurídiques) 2013.

Formación e investigación: creación de empleo estable (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Mario Barquero Cabrero, Doctor en Economia, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. José Luis Salido Banús, Doctor en Dret) 2013.

El sagrament de l'Eucaristia: de l'Últim Sopar a la litúrgia cristiana antiga (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Armand Puig i Tàrrach, Doctor en Sagrada Escripura, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Jaume Vallcorba Plana, Doctor en Filosofia i Lletres) 2013.

Al hilo de la razón. Un ensayo sobre los foros de debate (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Enrique Tierno Pérez-Relaño, Doctor en Física Nuclear, y contestación por la académica de número Excm. Sra. Dra. Ana María Gil Lafuente, Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales) 2014.

Col·lecció Reial Acadèmia de Doctors – Fundació Universitaria Eserp

1. *La participació del Sistema Nerviós en la producció de la sang i en el procés cancerós* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Pere Gascón i Vilaplana, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'acadèmica de número Excm. Sra. Dra. Montserrat Guillén i Estany, Doctora en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2014.
2. *Información financiera: luces y sombras* (Discurso de ingreso del Académico Numerario Excmo. Sr. Dr. Emili Gironella Masgrau, Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales y contestación por el Académico de Número Excmo. Sr. Dr. José Luis Salido Banús, Doctor en Derecho) 2014.
3. *Crisis, déficit y endeudamiento* (Discurso de ingreso del Académico Numerario Excmo. Sr. Dr. José Maria Gay de Liébana Saludas, Doctor en Ciencias Económicas y Doctor en Derecho y contestación por el Académico de Número Excmo. Sr. Dr. Juan Francisco Corona Ramón, Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales) 2014.
4. *Les empreses d'alt creixement: factors que expliquen el seu èxit i la seva sostenibilitat a llarg termini* (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm. Sr. Dr. Oriol Amat i Salas, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'acadèmic de número Excm. Sr. Dr. Santiago Dexeus i Trias de Bes, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials) 2014.
5. *Estructuras metálicas* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Joan Olivé Zaforteza, Doctor en Ingeniería Industrial y contestación por el académico de número Excmo. Sr. Dr. Xavier Añoberos Trias de Bes, Doctor en Derecho) 2014.

6. *La acción exterior de las comunidades autónomas* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Josep Maria Bové Montero, Doctor en Administración y Dirección de Empresas y contestación por el académico de número Excmo. Sr. Dr. José María Gay de Liébana Saludas, Doctor en Ciencias Económicas y Doctor en Derecho) 2014.
7. *El eco de la música de las esferas. Las matemáticas de las consonancias* (Discurso de ingreso del académico numerario Excmo. Sr. Dr. Vicente Liern Carrión, Doctor en Ciencias Matemáticas (Física Teórica) y contestación por la académica de número Excma. Sra. Dra. Pilar Bayer Isant, Doctora en Matemáticas) 2014.





Pilar Bayer i Isant és catedràtica d'àlgebra de la Universitat de Barcelona des de l'any 1982. Prèviament havia obtingut el títol de Professora de Piano pel Conservatori Superior Municipal de Música de Barcelona (1967) i s'havia llicenciat i doctorat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (1968, 1975). Ha estat professora de matemàtiques de les universitats de Barcelona (1968-1975), Autònoma de Barcelona (1969-1977 i 1981-1982), Regensburg (Alemanya, 1977-1980) i Santander (1980-1981).

El seu camp de recerca és la teoria de nombres. Les seves publicacions, en revistes com ara *Inventiones mathematicae*, *Mathematische Annalen*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *Journal of Number Theory*, *Compositio mathematica*, *Experimental mathematics* o *Acta Arithmetica*, versen sobre funcions zeta, formes automorfes, teoria de Galois, equacions diofantines i corbes de Shimura. Fins a l'actualitat ha dirigit 12 tesis doctorals. Amb Montserrat Alsina, és autora del llibre *Quaternion orders, quadratic forms and Shimura curves* (American Mathematical Society, 2004).

És acadèmica numerària de la Reial Acadèmia de Doctors (1994), de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts (2001), de la "Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales" (2010) de Madrid, i membre de l'Institut d'Estudis Catalans (2001). L'any 2004 fou nomenada *Emmy-Noether-Professorin* per la Universitat Georg-August de Göttingen (Alemanya). Ha rebut la Medalla Narcís Monturiol al mèrit científic i tecnològic de la Generalitat de Catalunya (1998) i el Premi Serra d'Or (2013) en la modalitat de recerca per la seva obra, conjunta amb Artur Travesa i Jordi Guàrdia, *Arrels germàniques de la matemàtica contemporània* (IEC, 2012).

“Lo que hace grandes a los investigadores es precisamente su libertad respecto de las ideas convencionales y su apertura a nuevas dimensiones de los problemas ... Y al fin y al cabo, potenciar esto debe ser un objetivo de la Reial Acadèmia de Doctors.”

“La interpretación humana está tan llena de matices y rasgos expresivos, que recogerlos excedería la capacidad de almacenaje computacional. En este sentido, la Ciencia debe verse como una aliada del Arte y viceversa, y no como cosas contrapuestas.”

Vicente Liern Carrión

1914 - 2014

Col·lecció Reial Acadèmia de Doctors - Fundación Universitaria Eserp



**Generalitat
de Catalunya**

