REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

La veritat matemàtica

Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari electe

Excm. Sr. Josep Pla i Carrera

Doctor en Matemàtiques

A l'acte de la seva recepció, 11 de febrer de 2003, i

discurs de contestació de l'acadèmic de número

Excm. Sr. Josep Ma. Costa i Torres

Doctor en Ciències Químiques

Barcelona

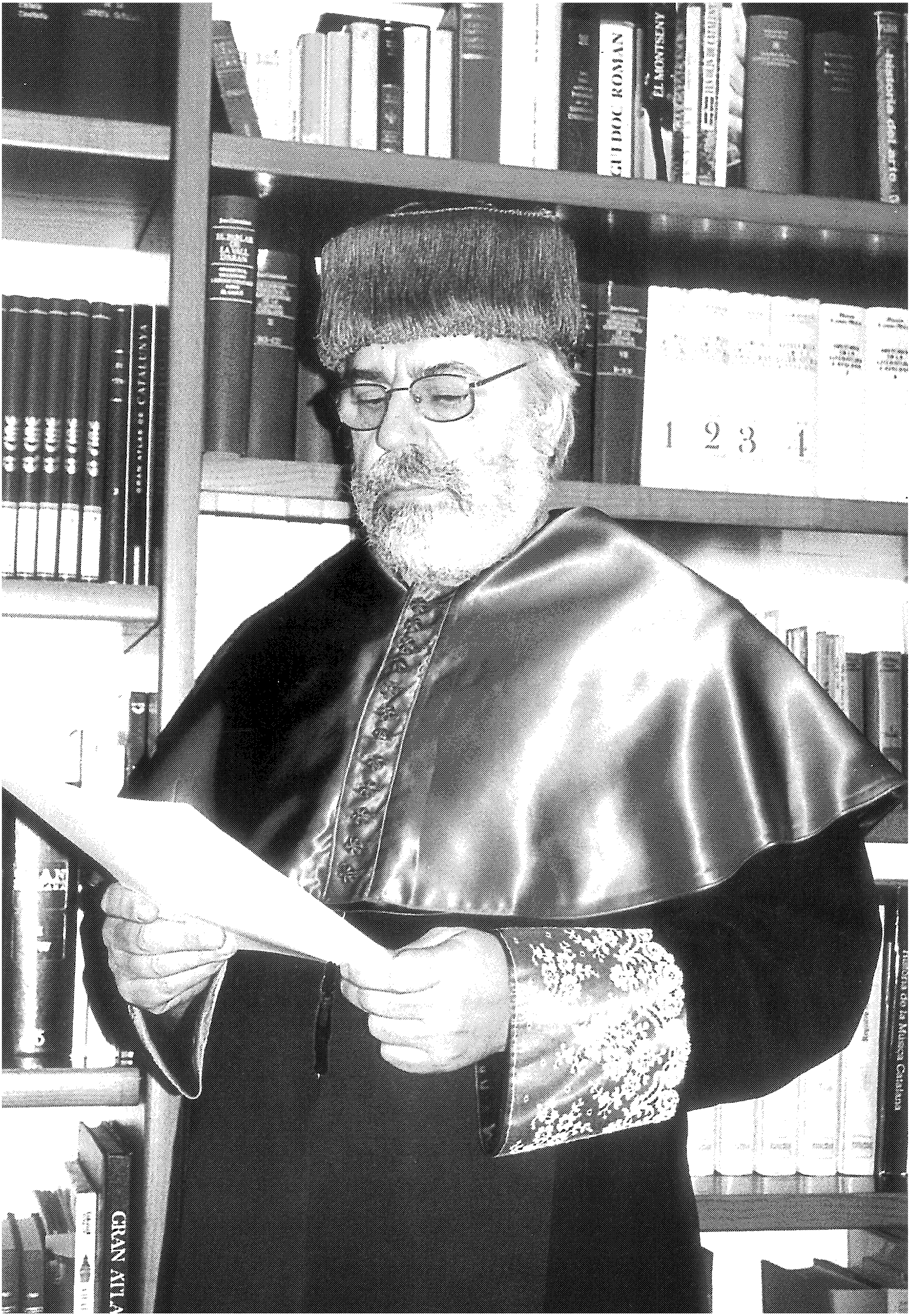
2003

Dr. Josep Pla i Carrera

La veritat matemàtica

REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

-Publicacions-


CATALUNYA
1 2 3 4
Història de la Música Catalana

La veritat matemàtica

JOSEP PLA I CARRERA
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

> Déu se m'apareix i em demana què vull.
> Li dic que ho vull saber tot de tot,
> I ell m'ho concedeix.
> Aleshores sé que és el diable.
>
> GUILLEM D'OCKHAM (~1284–1349)

Excel·lentíssim senyor degà-president, excel-lentíssims i il·lustríssims membres de la Reial Acadèmia de Doctors, distingit públic:

Moltes gràcies per la distinció que m'atorguen. Serà un honor per a mi participar d'ara endavant en les tasques que aquesta institució porta a terme.

La meva exposició s'articularà al voltant de la veritat matemàtica. El meu propòsit és oferir-los un apropament informal, però alliçonador, a aquesta qüestió.

Introducció

Abans d'endinsar-nos en la xerrada haurem de fixar el nucli de la qüestió: La pregunta

"Què és la veritat?"

ha estat motiu de preocupació i anàlisi des dels inicis del pensament humà. La trobem en els textos més antics de qualsevol *tradició religiosa*, els quals pretenen donar una resposta que, d'alguna manera, ens fonamenti les creences i justifiqui la nostra racionalitat. I òbviament la resposta a "què és la veritat?" és un dels eixos bàsics de qualsevol *teoria del coneixement humà* per primitiva que sigui i, de retruc, de qualsevol sistematització de l'*epistemologia de la ciència*. Podem afirmar que, en molts casos, les diferents opcions religioses i, sobretot, les diferents escoles filosòfiques divergeixen precisament en el tipus de resposta que ofereixen a aquesta pregunta singular i, alhora, fonamental. Com diu Josep-Maria Terricabres, en una conferència breu, però excel·lent, sobre la veritat ([66], 27):

> Una de les qüestions que més insistentment i més profundament ha ocupat i preocupat els homes al llarg de la història ha sigut la pregunta per la veritat. Des del temple i des del port de la nostra cultura occidental —des de Jerusalem i des d'Atenes— [1] s'ha preparat a bastament el terreny. La pregunta —no pas mancada d'ironia— que es fa Pilat en veu alta i que dirigeix també a Jesús de Natzaret ("I què és la veritat?"[37], **18**, 38) és la

[1] Jo afegiria, i des de Bagdad, simbolitzant el centre de l'islam, perquè, si Occident és quelcom, és la confluència de la racionalitat grega, la religiositat jueva, i l'incardinació física de l'islam.

> mateixa que s'havia intentat de respondre ja des dels primers col·loquis socràtics i que, d'aleshores ençà, s'ha anat responent de mil maneres en les filosofies, les religions o les ciències, en els mites i, fins i tot, en les tertúlies del cafè.

La meva intenció no és pas fer una exposició detallada —ni tampoc una de poc matisada— de les múltiples respostes —amb llurs diferències— a aquesta pregunta, aparentment tan simple.[2] L'objectiu d'aquesta lliçó —que espero sincerament que serveixi perquè tots nosaltres aprenguem quelcom que no havíem observat abans— és la *veritat matemàtica.*[3] Un concepte —el de veritat— que s'ha anat redefinint i reformulant des que, a finals del segle XIX, els lògics i els matemàtics van mirar d'establir els *fonaments de la matemàtica.*[4]

Tanmateix, no és aconsellable que desenvolupi l'evolució de les idees que aniran apareixent en l'exposició, sense fixar prèviament un marc mínim que serveixi per entendre una mica millor les dificultats que sorgeixen quan es vol establir la veritat matemàtica.

Si adoptem com a prou bona, pel que fa a la veritat congnoscitiva, la sentència escolàstica [[67], q.1, a.3, c.]:

> Veri enim ratio consistit in adæquatione rei et intellectus,[5]

[2]Per una aproximació al concepte de veritat, des de la lògica, vegeu [43].

[3]La tercera part de [8] està dedicada a la veritat matemàtica.

[4]El lector interessat a aprofundir la "crisi del concepte de certesa" en la matemàtica pot consultar l'excel·lent text de Morris Kline, [41]. I, per a una aproximació a la "crisi de fonaments", [22].

[5]El text íntegre diu: "La raó de veritat rau en l'adequació entre la cosa i l'enteniment; ara bé, allò que és idèntic no s'adequa amb ell mateix, sinó que la igualtat s'estableix entre les coses que són

ens adonem que aquesta definició —com qualsevol altra— no diu res de concret, si abans no precisem els tres termes que conté: adequació, intel·lecte i cosa.

I si, en un intent simplificador, seguint el camí racionalista de René Descartes (1596–1650) [[21], 119]

> je pense, donc je suis,[6]

creiem que tenim clar què entenem per intel·lecte i per entendre, encara caldrà aclarir els termes: cosa i adequació.

Pel que fa a la comprensió ulterior del concepte de veritat matemàtica el més rellevant dels tres és el d'adequació, perquè, encara que tinguéssim ben clar quina és la cosa i què és l'intel·lecte, quedaria oberta una qüestió molt important:

> És única la manera com pot efectuar-se l'adequació?

Bertrand Russell (1872–1970), segles més tard, dirà [[59], 215]:

> [...] Serà bo de considerar, un moment, la naturalesa de les coses a les quals atribuïm veritat o falsedat [...].
>
> Les coses que són vertaderes o falses [...]

diverses. Per tant, la raó de veritat es dóna per primer cop en l'enteniment allà on, també per primer cop, l'enteniment comença a tenir quelcom de propi que la cosa fora de l'ànima no té. Aquest quelcom de propi correspon a l'enteniment i és, gràcies a ell, que pot donar-se l'adequació" [*De Veritate*, q.1, a.3, c.]. Vegeu també *Summa contra gentiles*, II, 75, 1551.

Un estudi complet de la veritat en el *De veritate* el trobem a [32].

[6] "Penso, ergo existeixo". Vegeu la nota explicativa [21], 119, nota 133.

> són enunciats [...]. Quan, per exemple, veiem que fa sol, el sol mateix no és "vertader", però el judici "fa sol" sí que ho és.

I més endavant encara afegeix [[59], 223]:

> [...] el judici és una relació de l'esperit amb d'altres termes: quan aquests altres termes tenen *inter se* una relació "corresponent", el judici és vertader; quan no, és fals.

Per la seva part, Ludwing Wittgenstein (1889–1951), en el famós *Tractatus*, amb la seva expressió telegràfica característica, intenta aclarir-ho encara més [[71], 71 i 73]:

> 2.1. Ens fem imatges dels fets.
> 2.12. La imatge és un model de la realitat.
> 2.124. La imatge és un fet.
> 2.21. La imatge concorda o no amb la realitat: és correcta o incorrecta, vertadera o falsa.

Veiem, doncs, en totes aquestes aproximacions a la veritat, que parlem de la veritat del judici. I dependria del fet que hi hagi correspondència, és a dir, que hi hagi una certa adequació entre allò que s'afirma en el judici i allò que és: la cosa. La veritat o falsedat és, potser, la dependència mateixa.

Fixem-nos en l'exemple següent:

> La torre de Pisa està inclinada cap a la dreta.

Aquest judici és vàlid, quan es dóna la correspondència. Altrament, és fals. Però ens podem preguntar:

Correspondència entre què? i per a qui?

La veritat pot ser quelcom tan poc sòlid —o tan potent— que depengui, en última instància, de les persones que emetin la sentència.

> Y es que en el mundo traidor
> nada hay verdad ni mentira,
> todo és según el color
> del cristal con que se mira [[11], 41].

O, en paraules de Protàgoras (IV aC) [[39], edició castellana de 1987, 572]:

> *πάντων χρημάτων μέτρον ἐστὶν ἄνθρωποζ,*
> *τῶν μὲν ὄντων ὠζ ἔστιν, τῶν δὲ οὐκ ὄντων*
> *ὠζ οὐκ ἔστιν.*[7]

En qualsevol teoria del coneixement, en general, i en ciència en particular, un mínim de coherència obliga a establir criteris d'adequació intel·ligibles i acceptats per tots els que tenen necessitat de conèixer la validesa o falsedat del judici. Altrament, entraríem en una situació de validesa o falsedat "subjectiva", que difícilment podria ser entesa des de fora del subjecte, encara que la lingüística i la psicoanàlisi, potser, podrien ajudar-hi!

Si volem disposar d'un criteri de veritat per als judicis, cal una teoria de la correspondència que no depengui, per a res, de la subjectivitat de l'enunciant. Si tornem al nostre exemple de la torre de Pisa, hem d'establir el

[7] "L'home és la mida de totes les coses, de les que són en tant que són, i de les que no són en tant que no són". Vegeu la nota a peu de pàgina que ofereix Llanos a [45], 267, i també l'observació que fa Balasch, a la nota 24, sobre una possible traducció alternativa, a [55], 151e, 64.

significat "inclinat a la dreta" amb independència de la "dreta" de cada interlocutor —és a dir, ens caldrà evitar la relativitat—[8] fixant que "inclinat cap a la dreta" vol dir "cap a l'est", "cap a la banda on surt el sol". Però, fins i tot amb aquesta aprecicació, encara ens podríem trobar amb una ambigüitat. Suposem que el punt de sortida del sol canviés amb el temps. Tindríem una veritat variable en el temps, una qüestió de teoria del coneixement realment molt interessant i apassionant.

Refem, doncs, la nostra sentència en els termes:

> La torre de Pisa forma amb la horitzontal un angle de $87^{\circ}\,35'$.

Aquesta afirmació sembla més absoluta que l'altra, però és igual d'ambigua, perquè depèn del conveni geomètric d'angle, de com es mesura aquest, del sistema numèric adoptat, del sentit amb què el prenem, etc.

Pel que fa a la lògica clàssica, aquesta funcionalitat de la veritat, independent de la subjectivitat, és la que defensa Gottlob Frege (1848–1925) [[26], 31–59] i, amb molta més contundència encara, Wittgenstein, en l'obra citada.[9] La veritat és *funcional* i, de retruc, no és, en absolut, absoluta. Només ho serà, d'absoluta, un cop hàgim fixat un conveni d'adequació previ que, d'alguna manera, faci que sigui veritat allò que volem que sigui veritat, i fals allò que volem que sigui fals.

Aquesta és la tesi fonamental d'aquesta lliçó:

[8]Ens trobem amb la necessitat d'evitar la "relativitat", igual com passa en la teoria física de la relativitat, en què cada mòbil va amb el seu rellotge. Tot depèn, doncs, del fet que un objecte mòbil pugui pensar com si fos un altre.

[9]Consulteu, per exemple, 4.25, 4.3, 4.431, i 4.62.

> En matemàtiques, la veritat i la falsedat són una circumstància i no pas un atribut.

Els la presentaré fent un recorregut iniciàtic, no gaire pregon, per certes tesis que hom troba en qüestions d'epistemologia i lògica relacionades amb la veritat matemàtica. Evitaré els camps molt més complexos —i, per aquesta mateixa raó, molt més fructífers— de la lingüística, les teories semàntiques de la veritat en el sentit inciat per Richard Montague (1920–1970) [46], i de la pragmàtica tal com l'entenen J. L. Austin [4], o P. Grice [33].

§1. Imre Lakatos [†1974]: Proves i refutacions

En la correspondència entre l'enunciat i la cosa, no hem dit res de la cosa, perquè, quan fa referència a la realitat —sigui quin sigui el significat d'aquesta expressió— la cosa sembla clara. Ara bé, pot ser molt més complexa quan la cosa és fruit del nostre pensament creador.

El novembre de 1752, Leonhard Euler (1707–1783) llegia un treball en què pretenia classificar els políedres [[24], 109]:

> Mentre que en geometria plana els polígons (*figuræ rectilinæ*) es poden classificar molt fàcilment segons el nombre de costats que, naturalment, és igual al nombre d'angles, en estereometria la classificació dels políedres (*corpora hedris planis inclusa*) representa un problema molt més difícil, atès que el nom-

bre de cares no és suficient per aconseguir-ho.

Aleshores, al nombre de cares, hi afegeix el nombre de vèrtexs i d'arestes, i enuncia el teorema següent:

Teorema. En tot políedre val la igualtat següent:

$$\text{CARES} + \text{VÈRTEXS} - \text{ARESTES} = 2. \tag{1}$$

Com deia Pilar Bayer, a *Els sòlids platònics* —Discurs d'ingrés a aquesta Reial Acadèmia [[7], 12–15]—, els políedres regulars —coneguts per Plató— són cinc: el tetràedre, l'octàedre, l'icosàedre, l'hexàedre, i el dodecàedre. En tots l'enunciat d'Euler és absolutament rigorós, com podem veure fàcilment comptant les cares, els vèrtexs i les arestes de cada un [[7], 12].

Però, quan intentem estendre la demostració als sòlids de l'espai tridimensional limitats per cares planes, sorgeix una dificultat greu. Matemàtics molt eminents dels segles XVIII i XIX no són capaços de trobar-hi una demostració general.[10] Però encara pitjor: Si volem que el teorema d'Euler sigui vàlid, en general, hem d'establir què és un políedre, i què entenem per cares, vèrtexs i arestes.

Podríem contestar que la idea de políedre és clara:

> **Definició**. Un *políedre* és una superfície tancada, limitada per superfícies planes. Cada superfície plana és una cara, la intersecció de dues cares és una aresta, i la intersecció de tres arestes és un vèrtex.

[10] "He d'admetre que encara no he estat capaç d'idear una demostració estricta del teorema [...] Tanmateix, atès que la seva validesa s'ha establert en tants casos, no hi pot haver cap mena de dubte que val per a qualsevol sòlid. Per aquesta raó, la proposició em sembla totalment demostrada" [[24], 119, i 124]. Això no obstant, n'intentà una demostració a [25].

I comencen les dificultats.[11] Un cilindre, és un políedre? Està limitat per un pla que s'ha corbat fins a tancar-se i per dues cares circulars planes. Però no té vèrtexs! I, a més, no satsisfà la igualtat (1). Podem pensar que hem fet trampa, perquè hem considerat una cara plana que, en el cilindre, no ho és, de plana. Considerem, doncs, un cub al qual hem buidat, del centre, un cub totalment intern. Sembla que compleix la definició de políedre anterior, però la fórmula (1) és falsa, perquè consta de 12 cares, 24 arestes i 16 vèrtexs.

Podem fer dues coses. Definir políedre com aquell sòlid limitat per plans que compleix (1), o bé classificar les superfícies de l'espai d'acord amb el nombre

$$\chi = \text{Cares} + \text{Vèrtexs} - \text{Arestes}. \tag{2}$$

En el segon cas, tindríem políedres de *característica d'Euler-Poincaré* χ.

Aquesta és l'opció que, a finals del segle XIX, va prendre Henri Poincaré (1854–1912) i, en fer-ho, va fixar un concepte nou: l'*invariant topològic* [56]. De fet, dos políedres que tenen característica d'Euler-Poincaré diferent són, topològicament considerats, objectes diferents [vegeu [69]]. Amb aquesta manera d'entendre i classificar els sòlids de l'espai, tots els políedres regulars —i molts d'altres— són el mateix objecte topològic.

S'obre un món nou. Segons que prenguem una actitud o una altra, el concepte de veritat serà ben diferent. Tot depèn de com entenem la cosa —el políedre— i de si volem adequar-hi l'expressió (1) o la (2), molt més oberta

[11]Vegeu [44]. Aquesta obra és pòstuma. Malgrat que és la seva tesi doctoral, presentada a Cambridge en 1961, fou editada dos anys després de la mort d'Imre Lakatos.

i rica. És la nostra capacitat creadora la que ha de decidir-ho.[12]

Ens trobem amb la idea que defensa Richard Dedekind (1831–1916), segons la qual el progrés de la matemàtica depèn de la *creació* d'objectes nous i de nocions noves. Aquestes extensions de les definicions tenen la peculiaritat que

> no deixen lloc per a l'arbitri, sinó que se segueixen, amb una necessitat absoluta, de les prèviament limitades quan se'ls aplica el principi fonamental segons el qual s'han de considerar *vàlides en general* les lleis que resulten de les definicions inicials i són característiques dels conceptes determinats per aquestes [[20], 430].

§2. Alfred Tarski [1936]: La veritat i el model

La matemàtica s'expressa mitjançant un llenguatge formal en el qual elabora expressions —simples tirallongues de signes— d'acord amb unes regles de formació ben precises. Aleshores es planteja la qüestió:

> Té sentit preguntar-se per la validesa d'una expressió formal?

Imaginem, per simplificar, que l'expressió formal és

$$\sigma := \forall x\big(P(x) \to Q(x)\big), \tag{3}$$

[12]Sobre la capacitat creadora dels matemàtics, vegeu [5], capítol 1.

on $P(x)$ i $Q(x)$ són predicats de la variable x. És certa o falsa?

Per poder respondre, cal establir una correspondència que doti de contingut *semàntic* l'expressió formal anterior. Però això cal fer-ho d'una manera clara i precisa, tal com establí Alfred Tarski l'any 1936.[13] De fet, abreujant, diu que cal un *domini* on poder "llegir", d'acord amb unes regles precises d'interpretació, les nostres expressions formals. És a dir, hem de fixar un criteri d'interpretació.

Imaginem que les variables x recorren el domini Ω, format per totes les persones vives. Suposem ara que $P(x)$ l'interpretem "x és una persona casada" i $Q(x)$ per "x té l'ofici de matemàtic". Aleshores, l'expressió (3) s'interpreta:

> Tota pesona casada té l'ofici de matemàtic

que és clarament falsa.

En canvi, si imaginem que les variables x recorren el domini Ω, format pels nombres naturals, i $P(x)$ l'interpretem "x és múltiple de 4" i $Q(x)$, per "x és múltiple de 2", resulta que l'expressió (3) s'interpreta :

> Tot nombre natural que és múltiple de 4 també és múltiple de 2

que és clarament vertadera.

Quan succeeix això darrer, diem que el domini Ω és un *model* de la sentència anterior.[14]

[13]Vegeu [62]. Un article divulgatiu, però molt clar, és [63]. A [64] hi trobem un text encara més planer.

[14]S'expressa breument $\Omega \models \sigma$ i es llegeix "Ω és un model de la sentència σ".

Però el predicat (3) és, en ambdós casos, el mateix. No és ni vertader ni fals. La seva veritat o falsedat depèn de la semàntica que li atribuïm. Ara bé, la semàntica és múltiple. Com havien intuït Frege i Wittgenstein, la sentència és funcional. Fa correspondre un valor de veritat —o de falsedat— a cada una de les interpretacions possibles Ω que hi atribuïm.

Cal fer, però, dues remarques. La primera estableix que hi ha sentències que són vàlides per a qualsevol interpretació, com ara les sentències

$$\forall x\big(P(x) \to P(x)\big), \quad \exists x\big(P(x) \vee \neg P(x)\big).$$

Segons Wittgenstein, "no són imatges de la realitat. No exposen cap situació possible" $\big[$[71], 4.462$\big]$.

La segona, en canvi, posa de manifest la importància dels quantificadoros $\forall x$ —"per a tot x"— i $\exists x$ —"existeix un x tal que". Si una expressió no els conté de manera que afectin les variables que intervenen —és a dir, si una expressió no és una *sentència*— pot ocórrer que la interpretació es compliqui. En altres paraules, fixat un domini, hi ha ambigüitat, perquè, en general, no determina, per si sol, el valor de veritat de la sentència. En el nostre exemple, si treiem el $\forall x$, tenim només

$$P(x) \to Q(x). \tag{4}$$

Ara bé, en la primera interpretació que fèiem, si agafem com a valor de x una persona casada [o no] amb l'ofici de matemàtic, és certa; però si, com a valor de la variable x, n'agafem una de casada que no tingui l'ofici de matemàtic, és falsa.

És per tal d'evitar aquesta mena de dificultats que els matemàtics utilitzem sempre sentències; és a dir, expressions tancades per quantificació. Aquestes tenen la propietat que, en un domini Ω, una sentència sempre té un valor de veritat —vertader o fals— ben determinat, que mai no és ambigu. A més, la seva negació té el valor de veritat oposat.[15]

§3. David Hilbert [1925]: La veritat i la consistència

Segons David Hilbert (1862–1943), la veritat de les proposicions matemàtiques s'aconsegueix d'una forma molt diferent de l'anterior. Per poder establir què és veritat en una branca de la matemàtica —la geometria euclidiana, per exemple— cal fixar:

1) unes proposicions formals que acceptem com a vertaderes —els axiomes de la teoria—, i
2) unes regles de deducció molt clares, que permetin passar de certes expressions a d'altres de forma precisa.

Les regles de deducció les estableix la lògica matemàtica i són el reflex de les normes de raonament que socialment hem acceptat com a vàlides. Aquesta és, en síntesi, la filosofia de la matemàtica que desenvolupà Hilbert a partir dels anys vint, però que ja li havia servit per elaborar els *Grundlangen der Geometrie* (1899). De fet, salvant la distància temporal, s'inspirà en la manera de fer d'Euclides (III aC) als *Elements* ($\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$) [[23], 702–704]. La dificultat rau en la tria dels axiomes.

[15]Per una anàlisi més aprofundida del concepte tarskià de veritat, vegeu [29].

Aleshores, segons David Hilbert, seran vertaderes les sentències que s'hagin deduït correctament dels axiomes.[16] Són els *teoremes* de la teoria matemàtica i depenen, òbviament, de l'elecció dels axiomes.[17] Cal, però, que el sistema formal deductiu sigui *consistent* o bé, dit en altres paraules, que estigui lliure de contradiccions. És a dir, cal que, en aquest, sigui impossible demostrar una sentència i alhora la seva negació.

Precisem-ho amb un exemple senzill: el joc d'escacs.[18] Hi tenim un axioma únic: la posició de les fitxes a l'inici del joc, que pot ser perfectament una posició arbitrària, sempre que sigui correcta. Les lleis amb què passem d'una posició a la següent són les lleis del joc. Poden donar-se tres finals: que el jugador que té les fitxes blanques guanyi, que perdi —seria la situació oposada o negació—, o que hi hagi taules.

Segons Hilbert, un sistema deductiu matemàtic és molt semblant al joc d'escacs en el sentit que els objectes

---

[16] "Una demostració que no és rigorosa no és res. No crec que ningú posi en qüestió aquesta veritat. Però, si la prenem al peu de la lletra, haurem de concloure que, abans de 1820, per exemple, no hi havia matemàtiques, i això és clarament excessiu. Els geòmetres d'aquella època entenien voluntariament el que expliquem amb un discurs prolix [...]" [[57], 374].

De fet, totes les demostracions són sempre incompletes. Vegeu [19], edició castellana de 1989, 51.

[17] Els axiomes fixen els lligams entre els objectes —símbols— totalment indefinits, a banda dels axiomes. És el *formalisme* de Hilbert que, com s'ha repetit tantes vegades, ell va expressar, referint-se als axiomes de la geometria, dient: "en lloc de *punts*, *rectes*, *plans*, en qualsevol moment s'hauria de poder parlar de *taules*, *cadires*, i *gerres de cervesa*" [[9], 403].

[18] El símil no és del tot correcte. Al joc dels escacs, hi juguen dos jugadors enfrontats. En canvi, quan es demostra un teorema matemàtic només hi ha un jugador. És com fer un solitari. Però l'exemple serveix per al que vull exposar.

que intervenen en els axiomes no tenen altre sentit que el relacional que imposen els axiomes.[19]

Sorgeix una pregunta:

> La veritat en el sentit de Tarski —la *veritat semàntica*— i la veritat en el sentit de Hilbert

[19]Com a exemple, considerem dos conjunts, no buits, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$, tals que els objectes p del conjunt $\mathcal{K}$ poden pertànyer o no als objectes ℓ del conjunt $\mathcal{L}$. [És a dir, pot succeir que $p \in \ell$ o que $p \notin \ell$.] Ara imposo els axiomes següents:

Axiomes.
1. Dos objectes arbitraris de $\mathcal{K}$ pertanyen sempre a un únic objecte de $\mathcal{L}$.
2. Cap objecte de $\mathcal{K}$ està en més de dos objectes de $\mathcal{L}$.
3. No hi ha cap objecte de $\mathcal{L}$ que contingui tots els objectes de $\mathcal{K}$.
4. Dos objectes arbitraris de $\mathcal{L}$ contenen sempre, en comú, un únic objecte
de $\mathcal{L}$.
5. Cap objecte de $\mathcal{L}$ conté més de dos objectes de $\mathcal{K}$.

Teorema. El conjunt $\mathcal{K}$ té tres objectes i només tres.

En efecte, per demostrar-lo, haurem de jugar la partida d'escacs següent, a la qual no estem acostumats.

a) No hi pot haver un sol objecte en el conjunt $\mathcal{K}$, perquè aleshores, per l'axioma 1, hauria de pertànyer a un objecte de $\mathcal{L}$ [caldria considerar-lo repetit, atès que l'axioma 1 no imposa pas que els dos objectes de $\mathcal{L}$ hagin de ser diferents]. Aleshores hi hauria un objecte de $\mathcal{L}$ que tindria tots els objectes de $\mathcal{K}$, en contra de l'axioma 3. Això no pot ser.
b) Suposem, doncs, que el conjunt $\mathcal{K}$ només tingués dos objectes. Repetim el mateix raonament i veiem que no pot ser.
c) Suposem que en tingués més de tres. Aleshores, com a mínim, tindria quatre objectes diferents p_1, p_2, p_3, p_4. Per l'axioma 1, hi ha un objecte de $\mathcal{L}, \ell_{1,2}$ que conté p_1 i p_2, i un objecte de $\mathcal{L}, \ell_{3,4}$ que conté p_3 i p_4. Els objectes $\ell_{1,2}$ i $\ell_{3,4}$ són diferents, per l'axioma 5. Per tant, per l'axioma 4, contenen un objecte en comú. Aleshores, tant si l'objecte és un dels p_1, p_2, p_3, i p_4, com si és diferent d'ells, hi haurà un objecte de $\mathcal{L}$ que tindrà tres objectes de $\mathcal{K}$, en contra de l'axioma 5.

—la *veritat sintàctica*—, tenen res a veure?

La resposta la va donar, l'any 1930, el lògic vienès Kurt Gödel (1906–1978) a la seva tesi doctoral. És el *teorema de completesa*, i diu [[30], 20]:

> **Part fàcil**. Tots els teoremes $T(A)$ d'una teoria matemàtica axiomatitzable són vàlids en tots els models Ω dels axiomes A de la teoria.
>
> **Part difícil**. I, recíprocament, totes les sentències $V(A)$ que són vàlides en tots els models Ω dels axiomes A es poden deduir formalment d'aquests.

És a dir, les dues maneres d'establir la veritat coincideixen. Breument, $T(A) = V(A)$, on A designa el conjunt dels axiomes de la teoria formal $T(A)$.

Ens podríem preguntar si té alguna mena de sentit aquest joc. Només cal que pensem que els objectes de $\mathcal{L}$ són rectes i els de $\mathcal{K}$ punts. Aleshores $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ són els tres costats d'un triangle, i $\mathcal{K} = \{p_1, p_2, p_3\}$ en són els vèrtexs. Hem axiomatitzat el fet "ser un triangle". El nostre sistema d'axiomes té un model i, de retruc, és consistent.

§4. Kurt Gödel [1931]: La veritat i la incompletesa

La qüestió ara és la següent: en una posició platònica molt discutible,[20] suposem que els universos matemàtics —l'univers de la geometria euclidiana plana, l'univers dels nombres naturals amb el pas al següent, la suma i el producte, etc.— existeixen i, per tant, els seus objectes compleixen certes relacions —"per dos punts passa una recta i una de sola", "la suma dels nombres naturals és commutativa", etc. Suposem ara que, fixat un univers matemàtic concret precís, volem trobar un sistema axiomàtic formal que permeti deduir "tot allò que és veritat en aquest univers matemàtic fixat per endavant". David Hilbert creia que, per a cada branca de la matemàtica, sempre existeix aquest sistema axiomàtic. És el que hom coneix com el *programa de Hilbert.*

És a dir, si anomenem $V(\Omega)$ el conjunt de totes les sentències d'un cert llenguatge formal que són vàlides en el domini Ω i $T(A)$ el conjunt de totes les sentències que, en el mateix llenguatge formal, són deduïbles dels axiomes del conjunt A, la pregunta és:

> Donat un llenguatge formal i un domini concret Ω, existeix una axiomàtica A tal que $T(A) = V(\Omega)$?[21]

[20] De fet, els universos matemàtics solament existeixen en el si d'una teoria formal que és la teoria de conjunts. Vegeu [53].

[21] Ara, a diferència d'abans, *no recorrem* pas *a tots* els models possibles dels axiomes. Ara partim d'*un* domini Ω *concret* i *singular*. És la diferència bàsica entre el teorema de completesa i el d'incompletesa.

La resposta que donà Kurt Gödel, un any després del teorema de completesa, és negativa. És el que es coneix amb el nom de *primer teorema d'incompletesa*. Diu:

> **Teorema**. En tot sistema axiomàtic en el qual es puguin identificar els axiomes —i que contingui l'aritmètica de Peano— sempre hi ha una sentència σ tal que ni aquesta ni la seva negació $\neg\sigma$ no són demostrables.[22]

De fet, ningú no guanya. Hi ha taules. Ara bé, com ja hem dit abans, en tot domini, σ és una sentència vàlida o ho és la seva negació $\neg\sigma$. És a dir, una de les dues sentències —σ o $\neg\sigma$— és vertadera en el domini Ω, però cap d'ambdues no és demostrable. Per tant, és impossible axiomatitzar raonablement tota la veritat que hi ha en un univers matemàtic.

Però el teorema de Gödel demostrava una qüestió encara més enrevessada. Si usem un sistema axiomàtic formal, cal que ens assegurem que és *consistent*. És la condició irrenunciable de Hilbert. És a dir, cal que, abans d'usar-lo, ens assegurem que no portarà a contradicció, i cal que ho fem per mitjà de raonaments lògics o matemàtics que, per a un matemàtic, són els únics que tenen prou garanties. Doncs bé, el treball de Gödel de l'any 1931 mostra, com a corol·lari, que és impossible demostrar, amb

[22] En la resposta al magnífic discurs d'ingrés de l'Excm. Sr. Ángel Cardama Aznar, l'Excm. Sr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra fa una lectura molt àmplia de les conseqüències del teorema d'incompletesa de Gödel quan l'apliquem al sistema format pels tres vèrtexs del triangle màgic: dades, predicció, decisió, lligats per la ret més avançada de comunicacions. Diu que aquelles: "Nos recuerdan que, pese a lo sofisticado que puede llegar a ser dicho sistema, siempre existirán cuestiones sobre las que no podremos tomar decisiones, a menos que aportemos criterios externos al sistema" [[14], 179].

les eines de la matemàtica, la consistència dels sistemes axiomàtics [[31], 58 i 87]. Aquest resultat es coneix amb el nom de *segon teorema d'incompletesa.*[23]

Això no obstant, hi ha un altre camí per saber si una teoria axiomàtica és consistent —és a dir, vertadera. N'hi ha prou que els axiomes tinguin un model. Però,

> com podem saber si un conjunt Ω satisfà les propietats que fixen els axiomes de la teoria quan els llegim en el conjunt Ω?

Hem de recórrer

> al paradís del qual ja ningú no traurà mai la matemàtica[24]

com deia Hilbert, referint-se a la teoria axiomàtica de conjunts, introduïda per Georg Cantor (1845–1918) durant el darrer quart del segle XIX.

---

[23] La seva demostració és realment difícil.

Aquest resultat va fer expressar a Hermann Weyl (1885–1955): "Déu existeix perquè les matemàtiques són indubtablement consistents, i el dimoni existeix perquè no ho podem demostrar" [[41], edició castellana de 1985, 315].

[24] Vegeu [36], edició castellana de 1953, 275. La traducció és molt dolenta. El text anglès de [35], 375–376, diu: "Volem investigar amb atenció els camins que permeten elaborar conceptes i raonaments fructífers; volem tenir-ne cura, donar-los suport i fer-los manejables, sempre que presentin una promesa de progrés. Ningú no podrà expulsar-nos del paradís que Cantor ha creat per a nosaltres".

§5. Bertrand Russell [1902]: La veritat i la paradoxa

Amb Cantor apareixen els conjunts. I tot seguit sorgeix una pregunta nova:

> Què és un conjunt?

La definició de conjunt establerta per Cantor, data de l'any 1895 [[12], 207]. És realment molt simple. Diu:

> **Definició**. Per conjunt (*Menge*) entenc qualsevol col·lecció entesa com un tot M d'objectes de la nostra intuïció o del nostre pensament, definits i distingibles. Aquests objectes s'anomenen els elements del conjunt.

Tanmateix, com moltes de les definicions dels conceptes bàsics, és poc aclaridora, sobretot quan la col·lecció d'objectes és infinit. Recordem que, d'acord amb l'opinió que sosté Aristòtil (384–322 aC) a la *Física*, l'infinit actual no és acceptable en el món de la matemàtica. Textualment llegim:

> [Amb tots aquests arguments] queda demostrat que no hi ha cap cos infinit en acte.[25]

Això fa, òbviament, que no puguem acceptar els conjunts infinits com una totalitat, tant si els objectes que el

[25] [1], llibre III, capítol V, edició castellana de 1995, 202.

És curiós observar que Euclides quan ha d'establir l'anomenat postulat de les paral·leles evita anar a l'infinit imposant les condicions que han de satisfer dues rectes per poder afirmar que es tallen [[23], 703].

formen són fruït de la nostra intuïció com si ho són del nostre pensament i, molt menys encara, si són objectes del món real, sigui quin sigui el sentit que atribuïm a aquesta expressió.

Cal esperar fins a Immanuel Kant (1724–1804) que, a la *Crítica al judici* [[38], §26], diu:

> [...] La ment atén ara la veu de la raó, la qual, per a totes les magnituds donades [...] requereix la totalitat [...] sense excloure ni tan sols el requeriment a l'infinit, sinó que, al contrari, fa inevitable que considerem aquest infinit [...] com totalment donat (és a dir, com quelcom donat en la seva totalitat).

No obstant l'opinió dels filòsofs, els matemàtics no havien renunciat mai a usar conjunts infinits.[26] I és precisament aquesta pràctica matemàtica la que posa de manifest, almenys des del segle XVII, que hi ha dues maneres d'entendre un conjunt: per *extensió* i per *intensió*. Enumerant tots el seus elements (per extensió), o bé donant una propietat que els caracteritzi (per intensió).

És clar que la primera d'aquestes maneres és força inútil quan el conjunt que es vol definir és infinit —o àdhuc massa gran— perquè l'enumeració dels objectes del conjunt esdevé pràcticament impossible. Aquest fet porta a haver de recórrer a la definició intensional del conjunt. Aquest és el camí que va adoptar Frege [[27], §68] en el seu intent de fonamentar la matemàtica sobre la lògica —amb l'anomenat *programa logiscista*. De fet, era la tècnica més usada pels matemàtics de l'època.

[26] Aquesta afirmació caldria matisar-la molt. Recordem que Gauss s'oposava a l'ús dels infinits acabats: "M'oposo a l'ús d'una quantitat *acabada*. Això mai no està permès en matemàtiques. L'infinit només és una manera de parlar, segons la qual els matemàtics podem parlar amb propietat de límits" [[17], 120].

La idea de definir un conjunt intensionalment és simple i totalment intuïtiva. Definir un conjunt equival a donar una propietat que sigui satisfeta per tots i cada un dels elements del conjunt que volem definir i només per aquests. Per exemple, si volem definir el conjunt

$$\Pi := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots\},$$

que és totalment impossible donar extensionalment, podem dir simplement

Π és el conjunt de tots els nombres primers.

La propietat $P(x) :=$ "x és primer" permet definir el conjunt Π dels nombres primers, intensionalment per mitjà de

$$\Pi = \big\{x \in \mathbb{N} : P(x)\big\}.$$

Però, l'any 1902, Bertrand Russell va posar de manifest que aquesta manera d'entendre un conjunt porta a paradoxa.[27] És la famosa *paradoxa de Russell*.[28] En aquesta Russell demana si la propietat conjuntista següent:

> els conjunts que no es tenen a si mateixos com a elements,[29]

defineix un conjunt.

[27]El lector interessat a veure la diferència que hi ha entre una paradoxa semàntica i una paradoxa lògica pot consultar [51].

[28][60] reprodueix la famosa carta de Russell a Frege.

[29]Suposem que la propietat $P(x)$: "x és un conjunt i $x \notin x$" defineix un conjunt $\mathcal{R}$. Aleshores què passa? $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$? No!, perquè aleshores, si és un conjunt, haurà de complir la part del predicat que defineix els elements de $\mathcal{R}$, que és $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$. Per tant, necessàriament $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$. Però això tampoc no és possible, perquè si $\mathcal{R}$ és un conjunt resulta que $\mathcal{R}$ satisfa la propietat $P(x)$ i, per tant, $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$. Impossible!

És precisament la paradoxa que el mateix Russell va fer popular considerant una biblioteca en la qual s'elabora un índex que indexa tots, i solament, els índexos que no s'indexen a si mateixos. La qüestió és:

> L'índex que estem elaborant s'indexarà a si mateix?[30]

No podem limitar-nos, doncs, a la intuïció de la noció de conjunt. Cal recórrer a l'axiomatització en la línia de Hilbert. Així és com, a partir de començaments del segle XX, sorgeix la *teoria axiomàtica de conjunts*, coneguda actualment amb el nom de teoria de conjunts Zermelo-Fraenkel i abreujada **ZF**. Aquesta teoria és el fruit de les recerques i aportacions d'Erns Zermelo (1871–1953), Thoralf Skolem (1887–1963), i Abraham Fraenkel (1891–1965).

Ara bé, en convertir-se en una teoria axiomàtica més, presenta les mateixes dificultats —o, si ho prefereixen, limitacions— que la resta de sistemes axiomàtics, aquelles que havia provat Gödel l'any 1931.

Ens trobem, doncs, que la matemàtica és, com deia, Hermann Weyl (1885–1955):

> un ídol d'or que té els peus de fang.[31]

[30] Per aprofundir, de forma divulgativa, l'infinit, vegeu [3], i [52].

[31] Vegeu [41], edició castellana de 1985, 381, o bé [18], edició castellana de 2000, 118.

Félix Klein (1849–1925) diu: "De fet, les matemàtiques no han crescut com un arbre que s'aixeca damunt d'arrels finíssimes i creix simplement cap amunt, sinó que, al contrari, enfonsa les arrels cada cop més endins al mateix temps i a la mateixa velocitat que les seves branques i fulles s'estenen cap amunt [...] Veiem, doncs, que, pel que fa a la investigació sobre els fonaments de les matemàtiques, no hi ha cap final i alhora, d'altra banda, no hi ha cap començament" [[40], edició castellana de 1927, 14].

I la qüestió que es planteja és realment seriosa. No hi ha cap manera de saber si la teoria axiomàtica de conjunts és consistent. No és possible fer-ho des de fora de la teoria —des d'una altra teoria axiomàtica— perquè no tenim cap manera de saber si aquesta teoria ho és, de consistent. Però tampoc no ho podem fer usant un model de la teoria, perquè aleshores ho estaríem fent dins la teoria axiomàtica de conjunts i això contradiu el segon teorema d'incompletesa de Gödel.

És per aquesta raó que el grup francès Nicolàs Bourbaki, al final de la *Introducció* del volum dedicat a la teoria de conjunts, fa el següent acte de fe en el valor de la matemàtica, un acte de fe que accepta tot matemàtic professional en el seu quefer quotidià. Diu:

> Creiem que la matemàtica està destinada a sobreviure, i que mai no veurem ensorrar-se les parts essencials d'aquest edifici majestuós amb l'aparició d'una contradicció. Però aquesta afirmació no es basa en cap altre fet que l'experiència. Això no és gaire, dirà més d'un. Però heus aquí més de vint-i-cinc segles durant els quals els matemàtics s'han acostumat a corregir els seus errors i a veure la seva ciència cada cop més enriquida, i mai empobrida. Això els permet de mirar el futur amb serenitat [[10], 13].

§6. Paul J. Cohen [1963]. La veritat i la independència

Sorgeix ara una de les dificultats més greus en el sistema de fonamentació de la veritat matemàtica.

> Què és el que permet fer una tria d'axiomes o una altra?
>
> Hi ha cap criteri diferent del de la seva consistència que, com hem vist, no és possible establir?
>
> La veritat matemàtica és fruit de la intuïció dels genis de la matemàtica?

D'acord amb el primer teorema d'incompletesa de Gödel, tot sistema axiomàtic formal deixa fora dels seus teoremes almenys una sentència σ i alhora la seva negació $\neg\sigma$.

> Per què no fem que la nostra teoria sigui més potent afegint una de les dues sentències?
>
> Hi ha alguna manera de saber quina de les dues —σ o $\neg\sigma$— és més acceptable, més idònia per al quefer matemàtic?
>
> N'hi ha una per a la qual, en afegir-la, perdem la consistència del sistema formal, en cas que aquest, abans d'afegir-la, fos consistent?

La resposta, vertaderament sorprenent i sobre la qual tornarem en el paràgraf següent, la donà l'any 1963 el matemàtic nordamericà Paul Cohen (1934–) quan va aconseguir demostrar el teorema següent:[32]

[32] Aquest resultat, que podem trobar a [15], és tècnicament molt difícil.

Si la teoria axiomàtica de conjunts **ZF** és consistent, aleshores les dues teories axiomàtiques noves,

$$\mathbf{ZF} + \sigma \quad \text{i} \quad \mathbf{ZF} + \neg\sigma,$$

en què σ és la sentència que afirma que els matemàtics poden fer eleccions infinites, són també consistents totes dues.

És a dir, la consistència preconitzada per Hilbert no permet aclarir què és el que hem de fer. No dóna cap indicació sobre quina de les dues sentències és més vertadera. Les dues —una i la seva negació— són igualment vertaderes. Realment sorprenent!

Per comprendre-ho una mica millor, introduirem el joc conjuntista següent:

Agafem un conjunt A (numerable) de nombres reals estrictament compresos entre 0 i 1. Per exemple, el conjunt

$$A = \{0'1, 0'01, 0'001, 0'0001, \dots, 0'00 \overset{n)}{\cdots} 01, \dots\}.$$[33]

El jugador I tria la xifra 0 o 1. Imaginem que tria l'1. Aleshores tenim el nombre $0'1$. Aleshores el jugador II tria la xifra 0 o 1. Suposem que tria la xifra 0. Aleshores tenim el nombre $0'10$. Ara torna a començar el jugador I. L'objectiu del jugador I és aconseguir que el nombre infinit que s'aconsegueixi sigui del conjunt donat A. En canvi, l'objectiu del jugador II és que el nombre no sigui del conjunt A.

En l'exemple de joc J_A que proposem, el jugador II té sempre una estratègia de joc.[34]

[33]El conjunt A és el conjunt $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \}$, però havent expressat els nombres reals $\frac{1}{2^n}$ en forma decimal en base dos, tal com fan els ordinadors.

[34]Només cal que, a la primera jugada, jugui un 1, i després un 1 una vegada de cada dos, i un 0 una vegada de cada dos.

Definició. Donat un conjunt arbitrari (numerable) $X \subseteq (0,1)$, direm que el *joc* J_X *està determinat*, si un dels dos jugadors té sempre una estratègia guanyadora, si ambdós jugadors juguen amb tota la intel·ligència possible i, per tant, no cometen cap error.

La qüestió és:

Per a cada conjunt (numerable) $X \subseteq (0,1)$, el joc J_X corresponent està sempre determinat?

La pregunta és clara i senzilla. Doncs bé, la resposta serà la que nosaltres vulguem. Si volem que, per a cada conjunt $X \subseteq (0,1)$, el joc J_X sigui determinat, triarem una certa teoria axiomàtica de conjunts $\mathbf{ZF} + \sigma$. Però si, al contrari, volem que hi hagi un conjunt $X \subseteq (0,1)$ tal que el joc J_X associat no sigui determinat, haurem d'elegir la teoria axiomàtica de conjunts $\mathbf{ZF} + \neg\sigma$, igualment consistent que la primera.

Val a dir que, en la teoria de conjunts que actualment fem servir els matemàtics —és a dir, la teoria de conjunts
$\mathbf{ZF}+$ l'*axioma de l'elecció*—, hi ha jocs que no són determinats. És a dir, hi ha certs conjunts X amb els quals, per intel·ligent que sigui la manera de jugar dels jugadors, sempre s'arriba a taules. Això és degut al fet que ambdós poden fer tries infinites.[35]

[35]Fer una tria infinita és realment difícil si tenim en compte que, malgrat tot, el llenguatge matemàtic, formal o no, només permet fer frases finites. Seguint l'exemple didàctic de Russell, imaginem que disposem d'una infinitat de parelles de guants i volem fer una tria que elegeixi, de cada parella de guants, un guant ben determinat. Hi ha tries ben fàcils: "Tots els guants de la mà dreta", "Un guant de

§7. Bernhard Riemann [1854]: La veritat i el paradigma matemàtic

Sembla que hem tancat el cercle però ho hem fet amb una mena de cercle viciós que no té sortida. Hem de recórrer a l'axiomàtica si volem conèixer la veritat matemàtica, però no podem demostrar-ne la consistència i, a més, l'axiomàtica és indecidible.

> Qui té aleshores el dret de *decidir* què és veritat i què és fals?

Euclides ho va fer, al segle III aC, quan va establir els cinc postulats de la geometria. Va fixar què calia entendre per geometria.[36] I, en fer-ho, Euclides va triar la més ideal de les geometries possibles que podia haver triat. Va decidir que, en la geometria [[23], 704]:

---

la mà dreta i un de la mà esquerra", etc. Imaginem ara la situació anàloga i alhora diferent que ofereix una col·lecció infinita de parelles de mitjons. Els mitjons del peu dret i del peu esquerra no són distingibles. Això fa que hàgim de fer una tria del tipus: "D'aquest parell agafem aquest, d'aquest altre, aquest, etcètera". És una frase infinita i, per tant, no és vàlida. Doncs bé, l'*axioma de l'elecció* [AC] de la teoria de conjunts estableix que,

> Donada una col·lecció infinita de conjunts, no buits, sempre és possible fer una tria que elegeixi un objecte de cada un dels conjunts de la col·lecció i aleshores els objectes triats formen un conjunt.

[36] Molts segles més tard, Georg Cantor, juntament amb Erns Zermelo, Thoralf Skolem, Abraham Frankel, i Jonh von Neumann (1903–1957), va decidir què calia entendre com a teoria de conjunts.

P_1. Dos punts determinen una recta única —el segment rectilini— que els uneix.
P_3. Dos punts determinen una circumferència que té un punt com a centre i passa per l'altre.
P_4. Tots els angles rectes són iguals.

Però estableix molt més. Les rectes han de ser:

a) *il·limitades*,[37] en el sentit potencial aristotèlic —és a dir, sempre es poden estirar més i més.
b) *lliures de torsió*,[38] i
c) *infinites en longitud*.[39]

També va decidir que, en la geometria,

d) *hi ha uniformitat*.[40]

Finalment, va prendre la darrera decisió:

P_5. El *postulat de les paral·leles* [[23], 704]:

> Per un punt exterior a una recta podem fer-hi passar una paral·lela i una de sola.[41]

De tot això, en dedueix el teorema següent [[23], 724]:

> **Teorema**. La suma dels angles d'un triangle és igual a dos angles rectes, on un triangle és una

[37] El postulat P_2 diu: "tota recta es pot perllongar d'una recta" [[23], 704].

[38] Altrament el teorema 16 del llibre I [[23], 715] seria fals o, si més no, seria falsa la demostració que en fa.

[39] Altrament, totes les demostracions que depenen de l'arquimedianitat no valdrien. L'arquimedianitat diu que, donats dos segments rectilinis, repetint-ne un un nombre finit de vegades convenient, prou gran, sempre superarà l'altre [[23], 861].

[40] Si una recta o una figura es mou no es deforma.

[41] De fet, aquest enunciat és de John Playfair (1748–1819), perquè Euclides, per tal de respectar la prohibició de l'infinit actual, estableix en quines condicions podem saber que dues rectes s'han de tallar.

> figura formada per línees rectes que es tallen de dues en dues.

Aquest teorema és equivalent al postulat de les paral·leles.

Val a dir que, durant molts segles, ningú no qüestionaria que la geometria dels matemàtics era precisament la geometria que havia postulat Euclides. Tampoc ningú no pensaria que n'hi pogués haver cap altra, de geometria possible. Es qüestionava, això sí, el fet que el cinqué postulat —els postulat de les paral·leles— sigui intuïtiu i, per tant, que pugui ser admès com un postulat. D'acord amb el mestratge dels filòsofs grecs, l'únic que justifica un postulat és que la seva veritat és tan palesa, clara, intuïtiva i incontrovertible que no en podem dubtar. Aquest requisit no es dóna pas, en absolut, en el postulat de les paral·leles, perquè necessita el concepte d'infinit que, d'intuïtiu, no en té res. Però no es qüestionava, per a res, la seva validesa. Calia demostrar-lo a partir dels postulats que, com dèiem, havien de ser enunciats geomètrics intuïtius pel que fa a la validesa.

És clar que Euclides podia haver triat la geometria del cel, molt coneguda pels astrònoms que l'havien precedit. També podia haver descrit, amb els seus postulats, la geometria del pati de casa seva, en la qual fallaria òbviament el postulat de les paral·leles.

> Què li donava dret a pensar que la geometria era quelcom tan teòric, tan allunyat de la realitat, i alhora tan allunyat dels ensenyaments finitistes d'Aristòtil?

La resposta no és gens fàcil. La més assenyada és la que sosté que va descriure la geometria, molt uniforme, dels *ens ideals* de la matemàtica platònica, és a dir, la geometria de l'Acadèmia de Plató (428–347 aC) i, molt més fàcil de descriure que les altres geometries possibles, precisament perquè la geometria ideal està molt més allunyada de la realitat quotidiana o física.

En el si de la geometria euclidiana, Menelao d'Alexandria (I dC), a l'*Esfèrica*, establiria els resultats més importants de la trigonometria esfèrica, una eina indispensable per poder entendre el comportament dels planetes i dels estels. El llibre I s'acaba demostrant que, en un triangle esfèric —és a dir, en un triangle fet per tres cercles màxims de l'esfera— la *suma dels angles és més gran que dos angles rectes* [[34], 401]. És a dir, un triangle esfèric no és un triangle propi de la geometria euclidiana, i els cercles màxims de l'esfera que el descriuen no són pas rectes de la geometria euclidiana.

Hem de dir que, en l'obra d'Euclides, malgrat la definició 4 del llibre I [[23], 702] que diu:

> Una línia recta és aquella que jau per igual damunt dels seus punts,[42]

ningú no sap què és una línia recta. Aquesta anomalia seria resolta per Arquimedes (287–212 aC) que, a *De l'esfera i el cilindre*, estableix un principi —un postulat— que diu [[2], 26]:

> La línia recta és la més curta de totes les línies que tenen els mateixos extrems.[43]

Amb aquesta definició de línia recta, Arquimedes

[42]Pensem que aquesta definició la podem acceptar en qualsevol corba que tingui curvatura constant. És a dir, una circumferència també és una corba que jau per igual damunt dels seus punts.

[43]Manté el fet que una línia recta és un segment de corba limitat per dos extrems.

introdueix el concepte de *distància*, de *mètrica*, com diríem actualment.[44]

De fet, d'aquesta manera s'introdueix la llavor del que, molts segles més tard, l'any 1854, Bernhard Riemann (1826–1866) considerarà com a fonamental per establir la geometria d'una varietat geomètrica. Per dir-ho facilment, tot simplificant al màxim,

> la geometria depén precisament de les propietats que tenen les seves *línies geodèsiques*, o línies de distància mínima.[45]

En el cas de l'esfera, les línies de distància mínima sobre la superfície de l'esfera són els cercles màxims que hem agafat abans. Per tant, els triangles de la geometria de l'esfera són els triangles esfèrics que ja havia trobat i estudiat Menelao. Saber quines són les línies de distància mínima del pati de casa és força més difícil. Cal que, a mesura que ens apropem a la vora del pati —que hem de considerar un conjunt obert per tal que les rectes sempre es puguin perllongar— la distància es faci infinita. Pensem

---

[44] De fet, en la geometria euclidiana, la distància entre dos punts ve donada pel teorema de Pitàgoras, aplicat a les diferències de les coordenades dels punts. Però si la distància la volem sobre una superfície, aleshores hem de recórrer al càlcul integral. Hem de considerar un element infinitesimal de la superfície que identifiquem amb un element de pla. Aleshores ds, dx, dy, i dz estan lligats també pel teorema de Pitàgoras: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. La qüestió és:

> No és possible que la distància depengui també dels productes $dxdy, dydz$, i $dxdz$ i, a més, de factors que mesurin la torsió?

És a dir, no pot ser que

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^3 + 2g_{12}dxdy + 2g_{23}dydz + 2g_{13}dxdz?$$

[45] El lector interessat en una presentació divulgativa pot consultar [42], [16], i [65].

en l'horitzó que, a mesura que ens hi apropem, s'allunya. És a dir, podríem, en una aproximació divulgativa, fer que la distància d'un punt a la paret vingués donada per l'expressió $\frac{1}{x}$, on x és la distància del metre de mesurar de la geometria euclidiana.

En tot cas, la geometria està totalment vinculada a la superfície —a l'objecte geomètric— que estudiem. Imaginem que, com Arquimedes moderns, mentre som a la banyera, vulguéssim fer geometria, tot dibuixat línies rectes a les parets de la banyera: unes serien rectes en el sentit euclidià —les del terra—, unes altres estarien corbades cap amunt, i unes altres cap avall. La qüestió és

> Per què unes tenen dret a ser anomenades línies rectes i les altres, no?

A més, en la geometria de la banyera, les rectes, quan es mouen, es deformen.

Sense que vulgui entrar en profunditats massa perilloses pels meus coneixements, voldria acabar dient que la Teoria General de la Relativitat d'Albert Einstein (1879–1955) estableix que, quan hi ha grans masses o energies, les línies rectes de l'espai es corben. Imaginem la membrana d'un timbal i suposem que, en el centre, hi col·loquem una bola de plom molt pesada. La membrana es corbarà. A l'espai, doncs, passa el mateix que sobre la superfíe de la Terra: hi ha muntanyes i valls. Això no obstant, ningú no nega que, globalment, la superfície de la Terra és esfèrica.

La pregunta que ens podem fer ara és:

> Quina és la geometria global de l'Univers?
> És euclidiana?
> És esfèrica? Actualment se'n diu *el·líptica*.

És *hiperbòlica*? Seria la geometria del pati de casa, un cop l'haguéssim estructurat matemàticament de forma correcta com farien Eugenio Beltrami (1835–1900) i Felix Klein amb el model de Klein-Beltrami.

La resposta, en tot cas, l'hem de buscar fora de la matemàtica pròpiament dita, perquè matemàticament considerades les tres geometries són igualment vàlides: si una és consistent, les altres dues també ho són, atès que, en cada una, podem fer un model de les altres dues. Hem de recórrer a la realitat. La banyera no val perquè, de fet, és tan artificial com els resultats matemàtics.

Fa una mica més d'un segle, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) es va preguntar com era l'Univers, quina geometria tenia. Va pensar que mesurant els angles d'un triangle format per tres estrelles llunyanes ho podria aclarir. El seu amic i astrònom Friedrich Bessel (1784–1846) va mesurar l'angle de paral·laxi de l'estrella 61 de la constel·lació del Cigne. Nikolaï Lobatchevski (1792–1856),[46] en canvi, va servir-se de les estrelles Eridano 29, Rigel i Sirius. Cap d'aquests càlculs, tanmateix, no fou concluent.

Recentment s'ha introduït un concepte nou, la *densitat de l'Univers*: és la massa total de matèria per unitat de volum. Existeix un *valor crític* $\rho_0 = 4 \times 10^{-27}\text{kgs/m}^3$ que determina la geometria de l'Univers.

Densitat	Geometria	Futur
$> \rho_0$	Esfèrica	Col·lapse
$= \rho_0$	Euclidiana	Expansió suau
$< \rho_0$	Hiperbòlica com el pati de casa	Expansió forta

[46]Fou amb János Bolyai (1802–1860), però indpendentment d'ell, un dels pares de la geometria hiperbòlica, l'existència de la qual ja havia estat intuïda per Gauss.

La massa computada fins ara és el 10% de ρ_0. La conjectura és, per ara, que l'Univers, globalment, té una geometria hiperbòlica [del tipus del pati de casa] i que s'està expandint.

No obstant això, l'aportació del quefer matemàtic obre constantment possibilitats múltiples al concepte d'allò que és vertader. Seguint les paraules de l'escola del Bourbaki, solament aquesta tasca podrà aclarir en cada moment —i per a cada problema concret— quins són els criteris de veritat que cal fixar a través dels axiomes de la teoria formal per tal de poder aconseguir veritats noves, sempre relatives —com en el cas del joc que hem descrit al §6— del món immens i no tan exacte, pel que fa a la veritat, com és el món de la matemàtica.

I si creiem, com Galileo Galilei (1564–1642), que

> La filosofia [la naturalesa] està escrita en aquest llibre enorme que tenim constantment davant els ulls —em refereixo a l'univers—, però serà del tot impossible entendre-la, si abans no som capaços de copsar el llenguatge i aprehendre els signes amb els quals està escrit. *Està escrit en llenguatge matemàtic.* Els símbols són triangles, cercles i d'altres figures sense les quals és del tot impossible entendre ni una sola paraula. Sense la seva comprensió ens trobarem errants en un laberint obscur [[28], 1623, edició castellana de 1984, 61].

veiem que la veritat matemàtica és el fonament de molts altres coneixements. Així ho posà de manifest Isaac Newton (1642–1727), l'any 1687, quan va decidir titular la seva descripció de l'univers precisament *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

§8. Luitzen Brouwer [1907]: La veritat, la lògica i l'epistemologia

En tota la meva exposició he mantingut fixa la lògica subjacent al raonament matemàtic. Malgrat que hem vist que la veritat no sempre porta a una situació dual, sinó que pot donar-se un tercer valor: l'empat o taules. Tampoc no m'he preocupat de les qüestions epistemològiques, i molt menys encara de les temporals, pel que fa a la veritat.[47] I no penso pas fer-ho. És un món ple de misteris i de dificultats, perquè la matemàtica no és, com a vegades es vol fer creure, quelcom fix, sempre igual, invariant en el temps i independent del nostre coneixement i de les potencialitats i limitacions del nostre pensament i, de retruc, del nostre cervell. A més, en l'era de les computadores i dels ginys mecànics, malanomenats robots, les persones no són els únics ens que han de "comprendre" la matemàtica.

I una altra qüestió encara, realment molt difícil i que és el títol de la petita obra de divulgació de John D. Barrow

> Per què el món és matemàtic?[48]

Aquesta pregunta l'han intentat respondre matemàtics, físics

[47] L'exemple de Russell "avui fa sol", avui pot ser veritat i demà, fals. La qüestió és:

> En general, una veritat —i, en particular, una veritat matemàtica— depèn del temps?

[48] Vegeu [5].

i neuròlegs.[49]

Però, en tot cas, aquestes qüestions les deixo apuntades aquí per si hi ha una altra ocasió que ens permeti parlar-ne amb calma tot mirant d'entendre-les i d'aprofundir-les. Només poden ser aprofundides seriosament amb una discussió en la qual intervinguin mirades plurals no sempre convergents en llurs opinions i conclusions.

Aquestes preguntes —i sobretot les respostes que els puguem donar— són l'aportació que la lògica —les lògiques, si ho prefereixen— pot fer a una comprensió més acurada i pregona de la matemàtica. S'allunyen, però, de l'objectiu d'aquesta exposició en la qual hem intentat veure què és el que la pròpia matemàtica pot aportar a la comprensió de la veritat dels resultats matemàtics.

Cloenda

En cloure la meva exposició, voldria recordar el meu amic Nadal Batle (1945 –1997)[50] amb qui vaig compartir, els anys seixanta, l'entusiasme per la lògica matemàtica i els fonaments de la matemàtica. Aquesta passió l'heretarien els companys del Departament de Lògica de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona —Drs. Josep M. Font, Antoni Torrens, i Ventura Verdú— amb qui comparteixo un grup consolidat de recerca.

També voldria agrair molt particularment que la meva amiga de molts anys i col·lega en la passió per la Matemàtica —ella, d'una manera molt particular, per l'Aritmètica— i en la curiositat per la Història de la Matemàti-

[49]Vegeu, per exemple, [13].
[50]Vegeu [6].

ca m'hagi proposat de formar part d'aquesta Reial Acadèmia, i que hagi tingut l'amabilitat de llegir els esborranys d'aquesta lliçó i de millorar-la amb les seves observacions.

Però també vull regraciar la capacitat dels meus pares —Manuel i Francesca— per desvetllar-me l'amor pel coneixement, la confiança dels meus mestres —Drs. Enrique Linés i Francesc d'A. Sales— que van confiar en la meva capacitat i dedicació, i sobretot la complicitat del dia a dia en la recerca universitària —ella, a la de la M. Margarida que, amb el seu amor, la seva companyia i la seva paciència, m'ha facilitat poder mantenir la passió per l'estudi i el coneixement. Sense tots ells avui no seria aquí.

A tots vostès els haig d'agrair la seva disponibilitat a acceptar-me, perquè, en més de trenta anys de professió, és la primera vegada que una Institució m'atribueix una qualitat acadèmica que, d'ara endavant, m'hauré d'esforçar a mantenir per tal de no decebre'ls.

Moltes gràcies per la seva atenció!

Barcelona, 11 de febrer de 2003

Referències

[1] Aristòtil

Φυσιχή άχρόασιζ (*Curs de Física*). Traducció castellana de Guillermo R. de Echandía, *Física*. Editorial Gredos. Madrid, 1995.

[2] Arquimedes

Περί σφαίραζ χαί χυλινδρου (*De l'esfera i el cilindre*). Traducció castellana a [70], ii, 702–980.

[3] Autors diversos

"Ideas de infinito". *Investigación y ciencia*, Temas 23. Barcelona, 2001.

[4] Austin, J. L.

How to do things with words. Oxford University Press. Oxford. Traducció castellana de G. R. Carrió i E. A. Rabossi, *Palabras y acciones*. Paidós. Buenos Aires, 1971.

[5] Barrow, John D.

Perché il mondo é matematico? Giuseppe Laterza & Figli Spa. Roma, 1992. Traducció castellana de Javier García Sanz, *¿Por qué el mundo es matemático?* Grijalbo Mondadori. Barcelona, 1997.

[6] Batle, Nadal

El mal bocí. Selecció d'article periodístics. Edicions Documenta Balear. Palma, 2001.

[7] Bayer i Isant, Pilar

Els sòlids platònics. Discurs d'ingrés a la Reial Acadèmia de Doctors. Barcelona, 1996.

[8] Benacerraf, Paul i Putnam, Hilary

Philosophy of Mathematics. Basil Blackwell. Oxford, 1964.

[9] BLUMENTHAL, OTTO

"Lebengeschichte". En el volum tercer del *Gesammelte Abhandlungen* de David Hilbert, 388–429. Berlín, 1935.

[10] BOURBAKI, NICOLAS

Théorie des ensembles. Hermann. París, 1970.

[11] CAMPOAMOR, RAMÓN

Poesía. Cátedra. Madrid, 1996.

[12] CANTOR, GEORG

"Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)". *Mathematische Annalen*, **46** (1895), 207–246.

[13] CHANGEUX, JEAN-PIERRE i CONNES, ALAIN

Matière à penser. Éditions Odile Jacob. París, 1989. Traducció castellana de Marc Noy, *Materia de reflexión*. Tusquets Editores, S.A. Barcelona, 1993.

[14] CARDAMA AZNAR, ÁNGEL

Les telecomunicacions en la societat de la informació. Discurs d'ingrés a la Reial Acadèmia de Doctors. Barcelona, 2002.

[15] COHEN, PAUL J.

Independence of the Axiom of Choice. Standford University, 1963.

[16] CORBEILLER, P. LE

"La curvatura del espacio" a [61], edició castellana, 144–150.

[17] DAUBEN, J. W.

Georg Cantor: His Mathematics and Philosphy of the Infinite. Princeton University Press. Nova Jeresy, 1979.

[18] DAVIS, MARTIN

The Universal Computer. De Leibniz a Turing. Nova York, 2000. Traducció castellana de Ricardo García Pérez, *La computadora universal.* Debate. Madrid, 2002.

[19] DAVIS, PHILIP J. i HERSH, REUBEN

Descartes' Dream. Harcourt Brace Jovanovich, Inc. Nova York, 1986. Traducció castellana de Luís Bou, *El sueño de Descartes. El mundo según las matemáticas.* Labor. Barcelona, 1989.

[20] DEDEKIND, RICHARD

"Über die Einführung neuer Functionem in der Mathematik". *Werke*, III, 428–438.

[21] DESCARTES, RENÉ

Discourse de la méthode. Leiden, 1637. Traducció catalana de Pere Lluís Font, *Discurs del mètode.* Edicions 62. Barcelona, 1996.

[22] DOU, ALBERT

Fundamentos de la matemática. Editorial Labor. Barcelona, 1970.

[23] EUCLIDES

$\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$ (*Elements*). Traducció castellana a [70], I, 702–980.

[24] EULER, LEONHARD

"Elementa Doctrinæ Solidorum". *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ* (1752/53), **4**, 109–140, editat l'any 1758, a *Opera Omnia*, **26**, 69–93.

[25] EULER, LEONHARD

"Demonstratio nonnullarum insignium propietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt prædita". *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ* (1752/53),

4, 140–160, editat l'any 1758, a *Opera Omnia*, **26**, 94–108.

[26] FREGE, GOTTLOB

"Über Sinn und Bedeutung". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, **100** (1892), 25–50. Traducción castellana de Carlos R, Ruíz i Carlos Pereda, a *Escritos lògico-semánticos*, 31–59. Editorial Tecnos. Madrid, 1974.

[27] FREGE, GOTTLOB

Die Grundlagen der Arithmetik. Max und Hermann Marcus. Breslau, 1884. Traducción castellana de Claude Imbert, *Los Fundamentos de la Aritmética.* Editorial Laia. Barcelona, 1972.

[28] GALILEI, GALILEO

Il Saggiatore. Roma, 1623, 161. Traducció castellana de José Manuel Revuelta, *El ensayador.* Sarpe. Madrid, 1984.

[29] GARCÍA-CARPINTERO, MANUEL

"What is a Tarskian Theory of Truth?" *Philosophical Studies*, **82** (1996), 1–32.

[30] GÖDEL, KURT

"Die Vollständigkeit der Axiomer des logischen Funktionenkalküls". *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **37** (1930), 349–360. Traducción castellana a [47], 20–34. Alianza Editorial. Madrid, 1981. Traducció anglesa a [35], 582–591.

[31] GÖDEL, KURT

"Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme". *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173–198. Traducción castellana a [47], 55–89. Alianza Editorial. Madrid, 1981. Traducció anglesa a [35], 592–617.

[32] GONZÁLEZ AYESTA, CRUZ

Hombre y verdad. Gnoseología y antropología del conocimiento en las Q. D. De Veritate. Eunusa. Pamplona, 2002.

[33] GRICE, P.

"Meaning". *Philosophical Rewiev*, **67** (1957), 377–388.

[34] HEATH, sir THOMAS

Greek Mathematics. Dover Publications, Inc. Nova York, 1963.

[35] HEIJENOORT, JEAN VAN

From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts, 1967.

[36] HILBERT, DAVID

"Über das Unendliche". *Mathematische Annalen*, **95** (1926), 161–190. Traducción castellana de Francisco Cebrián, a *Fundamentos de la Geometría*, 264–272. Publicaciones del Instituto "Jorge Juan", monografías matemáticas, III. Madrid, 1953. Reeditat l'any 1996. Traducció anglesa a [35], 367–392.

[37] JOAN

"Evangeli segons Joan". *Nou Testament*. Monjos de Montserrat. Editorial Casal i Vall. Andorra, 1961.

[38] KANT, IMMANUEL

Crítica al judici. Könisberg, 1790.

[39] KIRK, G. S., RAVEN, J. E., i SCHOFIELD, M.

The Presocratic Philosophers. A critical History with a Selection of Texts. Cambridge University Press. Cambridge, 1957, i 1983. Traducció castellana de Jesús García

Fernández, *Los filósofos presocráticos. Una historia crítica con una selección de textos*. Editorial Gredos. Madrid, 1970, i 1987.

[40] KLEIN, FÉLIX

Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, 2 volums. Macmillan. Nova York, 1932/39. Traducció castellana de Roberto Araujo, *Matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado*. Biblioteca Matemática. Madrid, 1927.

[41] KLINE, MORRIS

Mathematics. The loss of certainty. Oxford University Press. Nova York, 1980. Traducció castellana de Andrés Ruíz Merino, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. XXI Siglo veintiuno de España Editores, S. A. Madrid, 1985.

[42] KLINE, MORRIS

"Geometria", a [61], edició castellana, 126–136.

[43] KNEALE, WILLIAM i MARTHA

The Development of Logic. Clarendon Press. Oxford, 1961. Traducció castellana de Javier Muguerza, *El desarrollo de la lògica*. Editorial Tecnos. Madrid, 1972.

[44] LAKATOS, IMRE

Proofs and Refutations-The Logic of the Mathematical Discovery. Cambridge University Press. Cambridge, 1976. Traducció castellana de Carlos Solís, *Pruebas y refutaciones*. Alianza Editorial. Madrid, 1978.

[45] LLANOS, ALFREDO

Los presocráticos y sus fragmentos. Juárez Editor. Buenos Aires, 1968.

[46] MONTAGUE, RICHARD

Formal Philosophy-Selected Papers of Richard Montague. Yale University Press. Yale, 1974. Traducció castellana de J. Daniel Quesada. Alianza Editorial. Madrid, 1977.

[47] MOSTERÍN, JESÚS

Kurt Gödel. Obras completas. Alianza Editorial. Madrid, 1977.

[48] NAGEL, ERNEST i NEWMAN, JAMES R.

Gödel's Proof. New York University Press. Nova York. Traducció castellana de Adolfo Martín, *El teorema de Gödel*. Editorial Tecnos. Madrid, 1970.

[49] NEWTON, ISAAC

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Cambridge, 1687. Traducció castellana de A. Escohotado y M. Sáenz de Heredia, *Principios matemáticos de la Filosofía natural*. Editorial Tecnos. Madrid, 1987.

[50] PLA I CARRERA, JOSEP

"Aportacions de la lògica matemàtica en la primera meitat del segle XX". *Actes del I Congrés Català de Lògica Matemàtica*, 17–32. Universitat de Barcelona i Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, 1982.

[51] PLA I CARRERA, JOSEP

"Lògica i gramaticalitat". *Actes del I Congrés de Llenguatges naturals i Llenguatges formals*, 45–51. Barcelona, 1985.

[52] PLA I CARRERA, JOSEP

"Alfred Tarski y su contribución a la teoría de conjuntos". *Investigación y Ciencia*, **184** (1992), 70–79.

[53] PLA I CARRERA, JOSEP

"El platonisme i la matemàtica: el tot i la part". *Actes del* X *Congrés de Llenguatges naturals i Llenguatges formals*, 275–290. Barcelona, 1994.

[54] PLATÓ

Κρατύλος (*Cràtil*). Traducció catalana de Jaume Olives Canals, *Diàlegs* IV. *Cràtil. Menexen.* Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1952.

[55] PLATÓ

Θεαιτητοσ (*Teetet*). Traducció catalana de Manuel Balasch, Pvre., *Diàlegs* XIV. *Teetet*. Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1995.

[56] POINCARÉ, HENRI

"Sur la Généralisation d'un Théorème d'Euler relatif aux Polyèdres". *Comptes Rendues des Scéances de l'Académie des Sciences*, **117** (1893), 144 pàgines.

[57] POINCARÉ, HENRI

Science et Méthode. Flammarion. París. Traducció castellana de M. García Miranda i L. Alonso, *Ciencia y método*. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1944.

[58] RIEMANN, BERNHARD

"Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". 1854. En castellà, a *Estado actaul, métodos y problemas de la Geoemtría Diferencial*, de E. Vidal Abascal. C.S.I.C. Publicaciones del Instituto "Jorge Juan", monografía matemáticas, II. Madrid, 1958.

[59] RUSSELL, BERTAND

Philosophical Essays. Allen & Unwin Ltd. Londres, 1966. Traducció castellana de Juan Ramón Capella, *Ensayos Filosóficos*. Alianza Editorial. Madrid, 1968.

[60] RUSSELL, BERTAND

"Carta a Frege", a [35], 124–125.

[61] SCIENTIFIC AMERICAN

Mathematic in the Modern World. W. H. Freeman and Company. San Francisco. Traducció castellana de Miguel de Guzmán Ozmaiz, *Matemáticas en el mundo moderno*. Editorial Blume. Madrid, 1974.

[62] TARSKI, ALFRED

"Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" (1931). *Studia Philosphica*, **1** (1936), 261–405. Traducció francesa, dirigida per Gilles Granger, a *Logique, sémantique, métamathématique*, I, 157–269. Armand Colin. París, 1972.

[63] TARSKI, ALFRED

"The Semantic Conception of the Truth and the Foundations of Semantics". *Philosophy and Phenomenological Research*, **4** (1944), 341–376. Traducció francesa, dirigida per Gilles Granger, a *Logique, sémantique, métamathématique*, II, 265–305. Armand Colin. París, 1972. Traducció castellana a l'obra *Antología Semántica* de Mario Bunge de 1960.

[64] TARSKI, ALFRED

"Truth and Proof". *Scientifican American* (1969).

[65] TAZZIOLI, ROSSANA

"Riemann. Le géomètre de la nature". *Pour la science*, **12** (2002).

[66] TERRICABRES, JOSEP-MARIA

"Sobre el concepte de veritat". *Actes del Segon Congrés Català de Lògica Matemàtica*. Barcelona, 15 i 16 de gener de 1983. Edició conjunta de la Universitat de Barcelona i la Politècnica de Catalunya. Barcelona.

[67] TOMÀS D'AQUINO

De veritate. París, 1256–1259.

[68] TOMÀS D'AQUINO

Summa contra gentiles. Roma, 1259–1264.

[69] TUCKER, ALBERT W. i BAILEY, HERBERT S. (jr.)

"Topologia", a [61], edició castellana, 151–158.

[70] VERA, FRANCISCO

Los científicos griegos (2 volums). Aguilar. Madrid, 1970.

[71] WITTGENSTEIN, LUDWING

Tractatus Logico-Philosophicus. Routledge & Kegan Paul. Londres, 1922. Traducció catalana de Josep Maria Terricabres, *Tractatus Logico-Philosophicus*. Editorial Laia. Barcelona, 1981.

Josep Pla i Carrera
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
934 021 660
pla@mat.ub.es

DISCURS DE CONTESTACIÓ

PER L'ACADÈMIC NUMERARI

EXCM. SR. DR. JOSEP Ma. COSTA I TORRES

Excel·lentíssim Sr. President,
Excel·lentíssims Srs. Acadèmics,
Senyores i Senyors,

Ens reunim avui en acte solemne per rebre a l'Acadèmia de Doctors un nou membre. És una gran satisfacció donar la benvinguda a l'Excm. Sr. Josep Pla i Carrera, Doctor en Ciències, Secció de Matemàtiques, Professor Titular del Departament de Lògica, Filosofia i Història de la Ciència de la Universitat de Barcelona, i una personalitat del món de la recerca històrica, i més concretament, de la història de les ciències matemàtiques.

He d'excusar-me, i així ho faig constar, de ser jo qui respongui l'erudit, interessant i important discurs de Dr. Pla. Les meves activitats professionals no corresponen pas al domini de la matemàtica i per això no sóc jo el més indicat per fer-ho. Però pertànyer a una Acadèmia pluridisciplinar té el risc d'haver de contestar l'Acadèmic entrant, honor que avui m'ha tocat. Agraeixo doncs al Sr. President la invitació de contestar el discurs del Dr. Pla i l'oportunitat de presentar-lo formalment.

Josep Pla i Carrera nasqué a San Feliu de Guíxols, Baix Empordà, el 1942. És Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona, el 1970. Obtingué el doctorat amb una tesi que porta per títol 'Contribució a l'estudi algebraic dels sistemes lògics deductius', que va dur a terme sota la direcció del Prof. Francesc d'Assís Sales, Catedràtic d'Estadística matemàtica, llegida el 1975 i qualificada amb Excel·lent 'cum laude'. Seguidament es traslladà a Paris, on va continuar la seva formació universitària amb diversos cursos de matemàtiques a la Facultat de Ciències.

El Dr. Pla va començar a donar classes com a professor de matemàtiques i immediatament es va mostrar molt actiu en el camp de la lògica algebraica. Professà cursos de matemàtiques a distintes institucions: Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat de Barcelona, Universitat Politècnica de Barcelona i a la que avui s'anomena Universitat Ramon Llull. Ser professor de quatre Universitats no és pas un cas freqüent, i indica el grau d'activitat docent del nou Acadèmic.

Al mateix temps que donava les seves classes i que mantenia el ritme de les seves publicacions, el Dr. Pla s'implicà cada vegada més en les tasques d'organització. Va formar part del comitè dels Congressos Catalans de Lògica, del 1982 al 1988, i dels Congressos de Llenguatges Naturals i Llenguatges Formals, del 1985 al 1992. Fou Cap d'Estudis de l'ensenyament de matemàtiques, 1985-1992, i uns anys més tard va ser elegit Degà de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, càrrec que va ocupar del 1989 al 1992.

D'altre banda, cal dir que el Dr. Pla és Premi "Martí d'Ardenya" de l'Institut d'Estudis Catalans, 1976, Premi per "Estudis i Investigació en Ciència Cognitiva Lògica", 1981 i 1991, Premi "Ferran Sunyer" de l'Institut d'Estudis Catalans, 1991, Premi de Literatura Científica de la Fundació Catalana per a la Recerca, 1998, entre altres. També és director de la revista "Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques" des del 1989.

La labor de recerca realitzada pel Dr. Pla ha assolit una autèntica transcendència. És autor d'un bon nombre de publicacions en els camps de la lògica algebràica, la història de les matemàtiques i la filosofia de les matemàtiques, i ha presentat ponències en gran nombre de reunions i congressos.

A la vista de l'activitat desenvolupada pel Dr. Pla, recordo el que va dir a un estudiós de la història de les ciències, Colerus, 'les matemàtiques són una ratera i el que s'hi fica difícilment troba la sortida'. Això és el que ha passat al Dr. Pla, que en gosar entrar ha quedat empresonat, i s'hi troba bé.

El discurs d'ingrés del Dr. Pla, que acabem d'escoltar, sota el títol "La veritat matemàtica", reflecteix la seva formació humanística, la seva personalitat profundament analítica, i és el resultat del seu entusiasme per la matemàtica i, sobre- tot, del seu esperit inquiet.

El Dr. Pla comença preguntant-se, *què és la veritat?*, la pregunta pilatina que ha estat motiu de preocupació i d'anàlisi des dels inicis del pensament humà. Encara que hi ha qui creu que la veritat no existeix i és un creació de la voluntat, el conegut '*das Leben will Täuschung, es lebt von der Täuschung* (la vida vol ficció, viu de la ficció)' de Nietzsche, és evident que la filosofia aporta al llarg de l'historia variades teories pel que fa al concepte de veritat. Quan un criteri de veritat falla se'n busca un altre més rigorós, i així es van acumulant criteris. Els errors duen a una certa frustració i, de vegades, a l'escepticisme, però sense renunciar mai a arribar a un criteri afortunat. I és que l'interès per la veritat és una necessitat de l'home. La sentencia socràtica '*ο αωεξεταστοζ βιοζ ου βιοτοζ ανθρωπψ* (una vida sense ànsia de veritat no pot ser viscuda per l'home)', ho posa en evidència.

A qualsevol tractat clàssic de filosofia trobem que el concepte de veritat implica sempre una relació. Els dos termes d'aquesta relació són el subjecte i l'objecte. És la definició clàssica de Sant Tomàs d'Aquino, '*adaequatio intellectus et rei* (congruència de l'intel·lecte i la cosa)', tantes vegades criticada. La filosofia de l'últim segle situa la veritat en el pensament tan sols o, més exactament, en el discurs humà. Des d'aquest punt de vista, es pot entendre la veritat com l'adequació del pensament a les coses. També es pot considerar que les idees tenen dues cares i dos valors distints, i que, com diu Ortega, 'una cara de la idea pretén ser mirall de la realitat, de manera que quan aquesta pretensió es confirma, es diu que és vertadera. La veritat és el valor objectiu de la idea'. Però per l'altra cara la idea s'agafa al subjecte, a l'home que la pensa; en coincidir amb el seu desig encara que no sigui vertadera, té una eficiència subjectiva i dóna satisfacció intel·lectual. Així aquest autor oposa a la veritat, o valor objectiu de la idea, la seva veritat o valor subjectiu.

La veritat, en reflectir el que les coses són, ha de ser una i invariable. Però la història ha canviat constantment d'opinió, i ha donat com a veritat la que en cada moment s'adopta. Cal, doncs, situar la veritat, que és invariable, en el context humà, que és variable. S'ha dit que cada individu té les seves pròpies conviccions d'allò que és per ell la veritat. És a dir, tan sols es pot parlar de veritats relatives; això és la *doctrina relativista*. Ara bé, si la veritat no existeix, no es pot parlar de relativisme, i, d'altra banda, el convenciment de la veritat està ben associat a la condició humana. Com que la veritat és una i invariable, cal una espècie de subjecte comú i contemporani a tots els homes. És el que Descartes en diu la *raó* i Kant l'*ésser racional*. Aquesta és la *doctrina racionalista*.

El pensament és vertader si s'ajusta a les coses, i les representa tal com són. Així doncs, segons Russell (1912), la veritat consisteix en una correspondència entre els elements d'una situació objectiva i els elements de la proposició que la descriu. Per tal de millorar el concepte, Austin (1950) sosté que la veritat radica en l'asseveració i no en l'enunciat. Però encara restava la dificultat d'haver de determinar si són o no vertaders l'anunciat i l'asseveració, per la qual cosa cal comparar-los amb una realitat conceptualment articulada. És necessari disposar d'estàndards de coherència que s'han de fer pas a pas i dia a dia, i que és impossible codificar-los mitjançant la metodologia científica i la filosofia. El positivisme lògic i les doctrines similars (1930) volien eliminar el concepte de veritat del pensament científic i filosòfic. Però Tarski (1933) va introduir un nou mètode que significà un canvi radical, el qual va ser simplificat i divulgat posteriorment (1944), i es va allunyar bastant de la concepció inicial. Cal citar Strawson (1950) i Glover (1970), entre els qui contribuirien a millorar el mètode.

Les relacions estructurals entre determinats enunciats asseveratius asseguren la propagació d'un als altres, independentment dels temes als quals es refereixen; és a dir, que la veritat de la conclusió està garantida si les premisses són totes vertaderes, tal com resulta d'aplicar la silogística aristotèlica.

En les ciències experimentals no té sentit predir el valor exacte d'una magnitud, per la qual cosa de vegades es parla de *veritat aproximada* i d'*aproximació a la veritat*. Les prediccions donen l'interval dins el qual està el valor, i també, en termes de probabilitat, que estigui dintre de l'esmentat interval. Dit d'una altra manera, les prediccions i les mesures són solament una 'veritat aproximada'. Així, la química clàssica i la química quàntica són dues aproximacions a la veritat, la segona més que la primera. Però aquesta relació entre veritat i aproximació és bastant problemàtica. Una predicció dóna una mesura definida del grau d'aproximació de la magnitud, però aquesta mesura falta en el cas de les aproximacions. Cal preguntar-se fins a on els conceptes de la teoria rellevada eren adients per a pensar la veritat. És clar que sense una teoria definitiva de totes les coses és difícil poder respondre la pregunta.

Per tal de dur a terme una comparació significativa entre les teories, cal recórrer al concepte quantitatiu de *versemblança*, introduït per Poper (1963), i definit com la diferència entre les mesures del seu contingut de veritat i el seu contingut de falsedat. Una teoria consistent mai és més versemblant que una teoria contradictòria i una teoria és més versemblant que una altre si la primera és vertadera i la segona és falsa però consistent, la qual cosa no resulta molt intuïtiva. Malauradament, les definicions emprades no són correctes, tal com posà en evidència Miller (1974). Altres autors també han tractat de trobar definicions adients, però la noció de versemblant com a aproximació a la veritat és un concepte que no està pas resolt.

Per tal d'emmarcar el concepte de veritat matemàtica, el discurs del Dr. Pla passa revista a les principals definicions que li permeten presentar la tesi del discurs: 'en matemàtiques, la veritat i la falsedat són una circumstància i no pas un atribut'.

Així fa l'anàlisi d'algunes tesis de qüestions d'epistemologia i de lògica relacionades amb la veritat matemàtica. Com les d'Imre Lakatos, la lògica del descobriment matemàtic, on discuteix la classificació, de manera que segons l'actitud adoptada el concepte de veritat serà ben diferent. A l'apartat dedicat a Alfred Tarski, la veritat i el model, queda de manifest que la veritat o la falsedat depenen de la semàntica que se li atribueixi, i per tal d'evitar dificultats cal utilitzar sentències amb valor ben determinat. Pel que fa a David Hilbert, la veritat i la consistència, les dues formes d'establir la veritat coincideixen. Respecte a Kurt Gödel, la veritat i passa revista a l'anomenat programa de Hilbert i estudia si la teoria axiomàtica és consistent. Seguidament comenta a Bertrand Russell, la veritat i la paradoxa, mitjançant una completa discussió sobre els conjunts i a través de la paradoxa de Russell i l'axiomàtica de Hilbert, conclou que no hi forma de saber si la teoria axiomàtica és consistent. A Paul J. Cohen, la veritat i la independència, planteja la qüestió de 'per cada conjunt el joc corresponent està sempre determinat?', per dir que la resposta és la que es vulgui. Seguidament, presenta a Berbhard Riemann, la veritat i el paradigma matemàtic, i es pregunta 'quina és la geometria de l'Univers?' i busca la resposta fora de la matemàtica pròpiament dita. L'últim punt està dedicat a Luitzen Brouwer, la veritat, la lògica i l'epistemologia. Totes aquestes tesis són discutides amb molta cura, tal com hem pogut comprovar durant la seva presentació. El Dr. Pla acaba la lliçó amb la pregunta '*Per què el món és matemàtic*?'. Aquesta qüestió, tal con ha dit, queda apuntada per a una altra ocasió aprofundir-la com cal.

És evident que les matemàtiques són aplicables a la vida real i són l'embrocat de les ciències de la natura. Construccions matemàtiques aparentment artificioses e inútils al ser creades, després han resultat adequades per a l'explicació científica de problemes reals. Només cal recordar la teoria de grups o el càlcul funcional. Les ciències experimentals no deixen pas de ser experimentals quan estan expressades en termes matemàtics. Però així aconsegueixen claredat i guanyen precisió. Per això el paper cada dia més important desenvolupat per la matemàtica a la física, la química, la biologia, entre moltes altres ciències. Parlar de les matemàtiques és parlar de l'evolució de les ciències, ja que l'estudi de la natura comença a ser ciència quan és quantitatiu. La química passa a ser una ciència amb Lavoisier, qui va introduir la balança al laboratori i va començar a trobar relacions quantitatives per tal d'explicar els fenòmens químics. El coneixement d'aquestes lleis va fer de la química una ciència racional. Així apareix la química física, com una branca de la química caracteritzada per la seva estructura altament matemàtica, construïda per investigadors, bons coneixedors de les matemàtiques i experts en mètodes numèrics.

Per tal de no sortir dels límits d'una contestació a un discurs d'ingrés a l'Acadèmia, no discutiré amb l'extensió que cal les aportacions de la matemàtica en el camp de les ciències de la natura ni la matematicitat del món. Tal con ens ha proposat el nou Acadèmic, ho deixem per a un altre dia.

Així doncs, només em resta dir que estic molt agraït al Dr. Pla per les seves reflexions sobre la veritat matemàtica. L'exposició que acabem d'escoltar és provocativa i indueix a pensar constructivament sobre la qüestió que analitza. Té sens dubte un toc d'originalitat que porta un enriquiment, i estimula a aprofundir en el tema.

I finalment, en nom propi i en el de Reial Acadèmia de Doctors, felicito ben cordialment el Dr. Josep Pla Carrera al ingressar en aquesta Institució, i espero que la seva col·laboració contribuirà a l'enriquiment intel·lectual de tots el qui en formen part.

Índex

NOVES PUBLICACIONS DE LA REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS

Directori 1991.

Los tejidos tradicionales en las poblaciones pirenaicas (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Eduardo de Aysa Satué, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Antoni Plana i Castellví, Doctor en Geografía i Història), 1992.

La tradición jurídica catalana (Conferència magistral del acadèmic de número Excm.Sr. Josep Joan Pintó i Ruiz, Doctor en Dret, en la Solemne Sessió d'apertura de curs 1992-93, que fou presidida per SS.MM. el Rei Joan Carles I i la Reina Sofía), 1992.

La identidad étnica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Angel Aguirre Baztan, Doctor en Filosofía i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Josep M. Pou d'Avilés, Doctor en Dret), 1993.

Els laboratoris d'assaig i el mercat interior; Importància i nova concepció (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Mª Simón i Tor, Doctor en Medicina i Cirurgia), 1993.

Contribución al estudio de las Bacteriemias (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Miquel Marí i Tur, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm.Sr. Manuel Subirana i Cantarell, Doctor en Medicina i Cirurgia), 1993.

Realitat i futur del tractament de la hipertròfia benigna de pròstata (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Albert Casellas i Condom, Doctor en Medicina i Cirurgia i President del Col.legi de Metges de Girona), 1994.

La seguridad jurídica en nuestro tiempo. ¿Mito o realidad? (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres), 1994.

La transició demogràfica a Catalunya i a Balears (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Ferrer i Bernard, Doctor en Psicologia), 1994.

L'art d'ensenyar i d'aprendre (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Agustín Luna Serrano, Doctor en Dret), 1995.

Sessió necrològica en record de l'Excm.Sr. Lluís Dolcet i Buxeres, Doctor en Medicina i Cirurgia i Degà emèrit de la Reial Acadèmia de Doctors, que morí el 21 de gener de 1994. Enaltíren la seva personalitat els acadèmics de número Excms.Srs.Drs. Ricard García Vallès, Josep Mª Simón i Tor i Albert Casellas i Condom. 1995.

La Unió Europea com a creació del geni polític d'Europa (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Jordi Garcia-Petit i Pàmies, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques), 1995.

La explosión innovadora de los mercados financieros (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Emilio Soldevilla García, Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, i contestació per l'Excm.Sr. José Méndez Pérez, Doctor en Dret), 1995.

La cultura com a part integrant de l'Olimpisme (Discurs d'ingrés com acadèmic d'honor de l'Excm.Sr. Joan Antoni Samaranch i Torelló, Marquès de Samaranch, i contestació per l'Excm.Sr. Jaume Gil i Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques), 1995.

Medicina i Tecnologia en el context històric (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i LLetres) 1995.

Els sòlids platònics (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numerària Excma.Sra. Pilar Bayer i Isant, Doctora en Matemàtiques, i contestació per l'Excm.Sr. Ricard Garcia i Vallès, Doctor en Dret) 1996.

La normalització en Bioquímica Clínica (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Xavier Fuentes i Arderiu, Doctor en Farmàcia, i contestació per l'Excm.Sr. Tomàs Vidal i Bendito, Doctor en Geografía) 1996.

L'entropia en dos finals de segle (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques, i contestació per l'Excm.Sr. Pere Miró i Plans, Doctor en Ciències Químiques) 1996.

Vida i música (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Carles Ballús i Pascual, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Mª Espadaler i Medina, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1996.

La diferencia entre los pueblos (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent Il.lm.Sr. Sebastià Trías Mercant, Doctor en Filosofia i Lletres, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

L'aventura del pensament teològic (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Josep Gil i Ribas, Doctor en Teologia, i contestació per l'Excm.Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 1996.

El derecho del siglo XXI (Discurs d'ingrés com acadèmic d'honor de l'Excm.Sr.Dr. Rafael Caldera, President de Venezuela, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Filosofia i Lletres) 1996.

L'ordre dels sistemes desordenats (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Josep Mª Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques, i contestació per l'Excm.Sr. Joan Bassegoda i Nonell, Doctor Arquitecte) 1997.

Un clam per a l'ocupació (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Isidre Fainé i Casas, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm.Sr. Joan Bassegoda i Nonell, Doctor Arquitecte) 1997.

Rosalia de Castro y Jacinto Verdaguer, visión comparada (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Jaime Manuel de Castro Fernández, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Pau Umbert i Millet, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

La nueva estrategia internacional para el desarrollo (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Santiago Ripol i Carulla, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Joaquim Gironella i Coll, Doctor en Medicina i Cirurgia) 1998.

El aura de los números (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor Enginyer de Camins, Canals i Ports, i contestació per l'Excm.Sr. David Jou i Mirabent, Doctor en Ciències Físiques) 1998.

Nova recerca en Ciències de la Salut a Catalunya (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numeraria Excma.Sra. Anna Mª Carmona i Cornet, Doctora en Farmàcia, i contestació per l'Excm.Sr. Ricard Garcia i Vallès, Doctor en Dret) 1998.

Dilemes dinàmics en l'àmbit social (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Albert Biayna i Mulet, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 1999.

Mercats i competència: Efectes de liberalització i la desregulació sobre l'eficàcia econòmica i el benestar (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Amadeu Petitbó i Juan, Doctor en Ciències Econòmiques, i contestació per l'Excm.Sr. Jaime M. de Castro Fernández, Doctor en Dret) 1999.

Epidemias de asma en Barcelona por inhalación de polvo de soja (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numeraria Excma.Sra. Mª José Rodrigo Anoro, Doctora en Medicina, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Llort i Brull, Doctor en Ciències Econòmiques) 1999.

Hacia una evaluación de la actividad cotidiana y su contexto: ¿Presente o futuro para la metodología? (Discurs d'ingrés de l'acadèmica numeraria Excma.Sra. Maria Teresa Anguera Argilaga, Doctora en Filosofia i Lletres (Psicologia) i contestació per l'Excm.Sr. Josep A. Plana i Castellví, Doctor en Geografia i Història) 1999.

Directori 2000.

Antonio de Capmany: el primer historiador moderno del Derecho Mercantil (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Xabier Añoveros Trias de Bes, Doctor en Dret, i contestació per l'Excm.Sr. Santiago Dexeus i Trias de Bes, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2000.

La medicina de la calidad de vida (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Luís Rojas Marcos, Doctor en Psicología, i contestació per l'Excm.Sr. Angel Aguirre Baztán, Doctor en Psicología) 2000.

Pour une science touristique: la tourismologie (Discurs d'ingrés de l'acadèmic corresponent, Il.lm.Sr. Jean-Michel Hoerner, Doctor en Lletres i President de la Universitat de Perpinyà, i contestació per l'Excm.Sr. Jaume Gil-Aluja, Doctor en Ciències Econòmiques) 2000.

Virus, virus entèrics, virus de l'hepatitis A (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Albert Bosch i Navarro, Doctor en Ciències Biològiques, i contestació per l'Excm.Sr. Pere Costa i Batllori, Doctor en Veterinària) 2000.

Mobilitat urbana, medi ambient i automòbil. Un desafiament tecnològic permanent. (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Pere de Esteban Altirriba, Doctor en Enginyeria Industrial, i contestació per l'Excm.Sr. Carlos Dante Heredia García, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2001.

El rei, el burgès i el cronista: una història barcelonina del segle XIII (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. José Enrique Ruiz-Domènec, Doctor en Història, i contestació per l'Excm.Sr. Felip Albert Cid i Rafael, Doctor en Medicina i Cirurgia) 2001.

La informació, un concepte clau per a la ciència contemporània (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Salvador Alsius i Clavera Doctor en Ciències de la Informació, i contestació per l'Excm.Sr. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra, Doctor en Enginyeria de Camins, Canals i Ports) 2001.

La drogaaddicció com a procés psicobiològic (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Miquel Sánchez-Turet, Doctor en Ciències Biològiques, i contestació per l'Excm.Sr. Pedro de Esteban Altirriba, Doctor en Enginyeria Industrial) 2001.

Un univers turbulent (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Jordi Isern i Vilaboy, Doctor en Física, i contestació per l'Excma.Sra. Ma. Teresa Anguera i Argilaga, Doctora en Psicología) 2002.

L'envelliment del cervell humà (Discurs de promoció a acadèmic numerari de l'Excm.Sr.Dr. Jordi Cervós i Navarro, Doctor en Medicina i Cirurgia, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Ma. Pou d'Avilés, Doctor en Dret) 2002.

Les telecomunicacions en la societat de la informació (Discurs d'ingrés de l'acadèmic numerari Excm.Sr. Angel Cardama Aznar, Doctor en Enginyeria de Telecomunicacions, i contestació per l'Excm.Sr. Josep Ma. Costa i Torres, Doctor en Ciències Químiques) 2003.

® Reial Acadèmia de Doctors
Impressió: Imprenta Baltasar 1861
Tels. 93 346 91 52 - 93 346 92 06
Tiratge 350 exemplars

Dipòsit Legal: B-9139-2003

REIAL ACADÈMIA DE DOCTORS
–Publicacions–